Темы курсовых работ
на 2012-2013 учебный год
профессор В.А. Тиморин

<table>
<tr><th>Курс</th><th>Тема</th></tr>
<tr><td>1 курс</td><td>1. Аналоги задачи Сильвестра.

Следующая задача Сильвестра нашла многочисленные и глубокие обобщения: существует ли набор точек на плоскости, такой, что каждая пара точек коллинеарна некоторой третьей точке, но не все точки коллинеарны?
<u>Источники</u>: В. Тиморин, С. Табачников, Прямая Сильвестра, Квант, 2009. № 5 и 6. С. 2-6 и 6-9

2. Размерность Хаусдорфа.

Хаусдорф ввел понятие размерности, имеющее смысл для любого метрического пространства - размерность Хаусдорфа. Размерность Хаусдорфа может быть любым неотрицательным действительным числом, в частности, дробным или даже иррациональным. Таковы размерности многих фрактальных множеств, возникающих в топологии и теории динамических систем (известные примеры включают канторовы множества, ковры Серпинского, множества Жюлиа, и т.д.). Посчитайте хаусдорфовы размерности некоторых фракталов.
<u>Источники</u>:
K. Falconer, Fractal geometry, Wiley 2003

3.Отображения, переводящие прямые в прямые.

Мебиус в 1827 году доказал, что взаимно-однозначное отображение проективной плоскости в себя, переводящее прямые в прямые, является проективным (т.е. дробно-линейным). Хотя доказательство Мебиуса предполагало непрерывность рассматриваемого отображения, позже выяснилось, что над действительными числами предположение непрерывности не нужно. (Это связано с отсутствием нетривиальных автоморфизмов поля действительных чисел).
<u>Источники</u>:
М. Берже, Геометрия, Том 1, М: Мир, 1984</td></tr>
<tr><td>1-2 курс</td><td>1.Геометрия тканей. Ткань на плоскости - это несколько семейств (скажем 3) кривых, таких что каждое семейство заметает область на плоскости, и кривые из разных семейств не касаются. Разберите теорему о том, как выглядят прямолинейные 3-ткани, переводящиеся заменой координат в ткань из прямых, параллельных сторонам правильного треугольника.
<u>Источники</u>:
В. Бляшке, Введение в геометрию тканей, Физматгиз, 1959

2. Траектории частиц в центральном поле. Приведите пример, когда</td></tr>
</table>

	траектория частицы в центральном поле плотна в некотором плоском кольце. Опишите все центральные поля, в которых все ограниченные траектории замкнуты. Источники: В.А. Арнольд, *Математические методы классической механики*, URSS, 2003 **3. Статистика цепных дробей.** Как часто данное натуральное число встречается в качестве элемента цепной дроби? Источники: А.Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Физматлит, 1960 **4. Композиция бинарных квадратичных форм.** Бинарная квадратичная форма - это функция вида $f(x) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$, $x = (x_1, x_2)$, где a, b, c - постоянные коэффициенты. Важной задачей является изучение множества значений квадратичной формы с целыми коэффициентами (на векторах с целыми координатами). Пусть f и g - квадратичные формы одинакового дискриминанта. Тогда существует квадратичная форма h и билинейное отображение s: $\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2$, такие, что $h(s(x,y)) = f(x)\, g(y)$. В частности, любое значение формы h является произведением значения формы f на значение формы g. Этот факт заметил Гаусс, и ввел естественную билинейную операцию s, превращающую несократимые квадратичные формы данного дискриминанта (рассматриваемые с точностью до положительных целочисленных замен переменных) в абелеву группу. Операция в этой группе называется композицией квадратичных форм. Приведите и докажите явные формулы для композиции (например, следуя Гауссу и Дирихле). Источники: К.Ф. Гаусс, *Труды по теории чисел*, Изд-во АН СССР, Москва, 1959 Л. Дирихле, *Лекции по теории чисел*, М: ОНТИ, 1939
1-3 курс	**1. Задача Гурвица про произведения сумм квадратов.** В 1898 году Гурвиц поставил такую задачу: описать все тройки натуральных чисел (r,s,n), для которых возможна формула вида $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_s^2) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$. В этой формуле все z_k - билинейные комбинации переменных x_i и y_j. Примеры формул такого вида можно получить, исходя из правила умножения комплексных чисел, кватернионов или октав. Задача Гурвица открыта до сих пор, хотя многие выдающиеся математики пытались ее решить, и созданный ими топологический аппарат (характеристические классы, вещественная К-теория) оказался полезным во многих других областях математики. Сам Гурвиц и, независимо, Радон, полностью описали случай s = n. Он связан с представлениями алгебр Клиффорда. Имеется еще несколько менее общих формул рассматриваемого вида. Разберите примеры таких формул (начиная с кватернионов и октав). Для 2 и 3 курсов - классифицируйте формулы Гурвица с малым числом слагаемых. Источники: И.Л. Кантор, А.С. Солодовников, *Гиперкомплексные числа*, Москва:

	Наука, 1973 D. Shapiro, *Products of sums of squares*, Expo. Math. 2 (1984), 235-261 B. Eckmann, *Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon ueber die Komposition quadratischer Formen,* Comm. Math. Helvetici (1929), 358-366
2 курс	**1.Число вращения, теорема и пример Данжуа.** Рассмотрим гомеоморфизм окружности на себя. Сопряжен ли он повороту? Оказывается, для дважды дифференцируемого гомеоморфизма с иррациональным числом вращения, ответ положительный. А если гомеоморфизм только один раз дифференцируем, есть контрпримеры. Источники: А. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, 1999
2-3 курс	**1. Теорема о максимальном числе граней.** П. Макмюллен в 1970 году решил следующую задачу, стоявшую открытой довольно долго: среди всех выпуклых многогранников в $\mathbf{R}^n$ с фиксированным числом вершин, найти многогранники с максимальным числом граней размерности k. Интересный класс многогранников (циклические многогранники) решает эту задачу одновременно для всех k - это было гипотезой, которую и доказал Макмюллен. Опишите комбинаторные свойства циклических многогранников. Объясните доказательство теоремы о максимальном числе граней. Постройте другие примеры многогранников, реализующие максимальное число граней. Источники: А. Бренстед, *Введение в теорию выпуклых многогранников*, М: Мир, 1988 В. Тиморин, *Комбинаторика выпуклых многогранников.* М: МЦНМО, 2002. **2.Множество Мандельброта связно.** Множество Мандельброта - один из самых известных фракталов. Это множество всех комплексных чисел с, для которых последовательность с, $c^2 + c$, $(c^2 + c)^2 + c$, ..., ограниченна. Множество Мандельброта очень важно в теории комплексных динамических систем - благодаря явлению ренормализации, оно возникает практически во всех случаях, когда рассматриваются итерации голоморфных отображений, аналитически зависящих от параметра. Как доказали Дуади и Хаббард, множество Мандельброта связно. Разберите доказательство этого утверждения. Знаменитая гипотеза о том, что множество Мандельброта также локально связно, на протяжении многих лет не поддается активным атакам со стороны многих замечательных математиков. Источники: Дж. Милнор, *Голоморфная динамика*, РХД, 2000 L. Carleson, T.W. Gamelin, *Complex dynamics,* Springer, 1992 **3. Метод Ньютона.** (руководство совместно с Д.Шляйхером). Источники: J. H. Hubbard, D. Schleicher, S. Sutherland, *How to Find All Roots of Complex Polynomials by Newton's Method.* Inventiones Mathematicae vol. 146 (2001), no.1, pp. 1-33 Carleson, T.W. Gamelin, *Complex dynamics,* Springer, 1992
3 курс	**1. Бильярды.** (руководство совместно с С.Табачниковым).

	Источники: S. Tabachnikov, *Geometry and billiards.* Amer. Math. Soc., 2005