Темы курсовых работ

2012-2013 учебный год

Вербицкий Михаил Сергеевич

1-Й КУРС

А. Топологическая группа есть топологическое пространство G с заданной на нем групповой операцией, такая, что умножение GxG -> G и взятие обратного непрерывны. Пусть G -- компактная, связная топологическая группа, причем для какого-то t, множество t, t^2, t^3, t^4, ... плотно в G. Докажите, что G изоморфно тору.

Б. Постройте счетное, связное хаусдорфово топологическое пространство. Может ли оно быть компактно? Решение лучше поискать в литературе (Гуглем, например), самостоятельно найти такую штуку будет трудно.

В. Дифференцирования кольца А – отображения из кольца в себя, удовлетворяющие тождеству Лейбница $d(xy) = d(x) Y + x d(y)$. Пусть А -- кольцо гладких функций на $\R^n$. Докажите, что модуль дифференцирований изоморфен свободному модулю A^n.

Г. {\bf Топологическое кольцо} есть кольцо, где задана топология, причем умножение и сложение непрерывны. {\бф Локальное поле} есть локально-компактное топологическое кольцо с делением. Докажите, что любое локальное поле характеристики 0 есть конечное расширение p-адического поля $\Q_p$ либо $\R$.

2-Й КУРС

А. Докажите, что группа изометрий компактного риманова многообразия -- компактная группа Ли.

Б. Аменабельная группа есть группа G, снабженная инвариантной аддитивной положительной мерой на кольце всех подмножеств (можно считать, что мера G равна 1). Докажите, что Z^n аменабельна, а свободная группа F_n от двух и более образующих не аменабельна. Докажите, что группа, содержащая F_2, не аменабельна.

В. Докажите "альтернативу Титса": если группа Ли не разрешима, она содержит свободную группу F_2. Решение поищите в литературе, если не получается.

Г. Постройте меру Хаара (нетривиальную левоинвариантную борелевскую меру) на локально компактной топологической группе. Используя меру Хаара, докажите, следующую теорему фон Ноймана: любая компактная группа, которая гомеоморфна многообразию, является группой Ли. Следует пользоваться книгой Тао о 5-й проблеме Гильберта.

Д. Изучите категорную версию теории Галуа, принадлежащую Гротендику (гуглить на

"Galois cathegories"). Пусть M -- метрическое пространство. Рассмотрим топологию на фундаментальной группе M, индуцированную топологией равномерной сходимости в пространстве петель. Надо определить категорию Галуа "топологических накрытий" таким образом, чтобы связные накрытия в этой категории соответствовали замкнутым подгруппам в топологической группе Галуа. Эта работа имеет научный смысл и может быть опубликована.

3-й, 4-й курс, магистратура.

А. Если вы не знаете определение орбиобразия, найдите в литературе. Определите неразветвленное накрытие орбиобразий. Найдите все двумерные орбиобразия, не допускающие неразветвленных, гладких накрытий (указание: все они рода 0 и 1). Решение этой задачи можно поискать в Гугле, спросить у кого-нибудь, либо сделать самостоятельно.

Б. Пусть G -- компактная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g_0. Решите уравнение потока Риччи $g_t' = - 2\Ric(g_t)$ в классе левоинвариантных метрик. Найдите, к чему сходится.

В. Плоское аффинное многобразие есть фактор открытого подмножества U в R^n по дискретной группе аффинных преобразований. Геодезическая плоского аффинного многообразия есть образ прямой из U. Докажите, что каждое плоское аффинное компактное многообразие содержит плотную геодезическую.

Г. Докажите теорему Бибербаха (18-я проблема Гильберта). Если M -- компактное риманово многообразие с плоской метрикой, то у M есть накрытие, изометричное плоскому тору. Решение этой задачи можно поискать в Гугле.

Д. Пусть g -- вещественная алгебра Ли. Комплексная структура на g есть подалгебра $g^{1,0}\subset g\otimes \C$ такая, что $g^{1,0}$ не содержит вещественных векторов и ее комплексная размерность равна $1/2\dim_\R g$. Пусть g нильпотентная алгебра Ли, n ее размерность, а m -- длина центрального ряда. Докажите, что для вещественной алгебры Ли, допускающей комплексную структуру, $m \leq \lambda n$, для какой-то константы $\lambda <1$. Ответ к этой задаче науке неизвестен, и заслуживает публикации в приличном журнале.

Е. В задаче про комплексные структуры на нильпотентных алгебрах Ли, оцените константу λ посредством компьютерного перебора нильпотентных алгебр Ли ограниченной размерности.

4-й курс, магистратура.

А. Пусть A -- дифференциальная градуированная алгебра, а G -- алгебра верхнетреугольных матриц с коэффициентами в A. "Обобщенные произведения Масси" (по Бабенко-Тайманову, arXiv:math/9911132) суть препятствия к почленному формальному решению уравнения Маурера-Картана $\gamma^2 = - d\gamma$. Теперь, возьмем в качестве A комплекс де Рама для нильпотентной алгебры Ли. Вознимают три задачи, одна проще, две труднее. Во-первых, доказать, что для неабелевой нильпотентной алгебры обобщенные произведения Масси нетривиальны. Во-вторых, выяснить, для каких неабелевых нильпотентных алгебр Ли обычные (трехчленные) произведения Масси всегда тривиальны, и существуют ли такие алгебры Ли. В третьих, восстановить нильпотентную алгебру Ли по ее обобщенным произведениям Масси, или убедиться, что это невозможно. Последние две задачи в случае успеха заслуживают публикации.