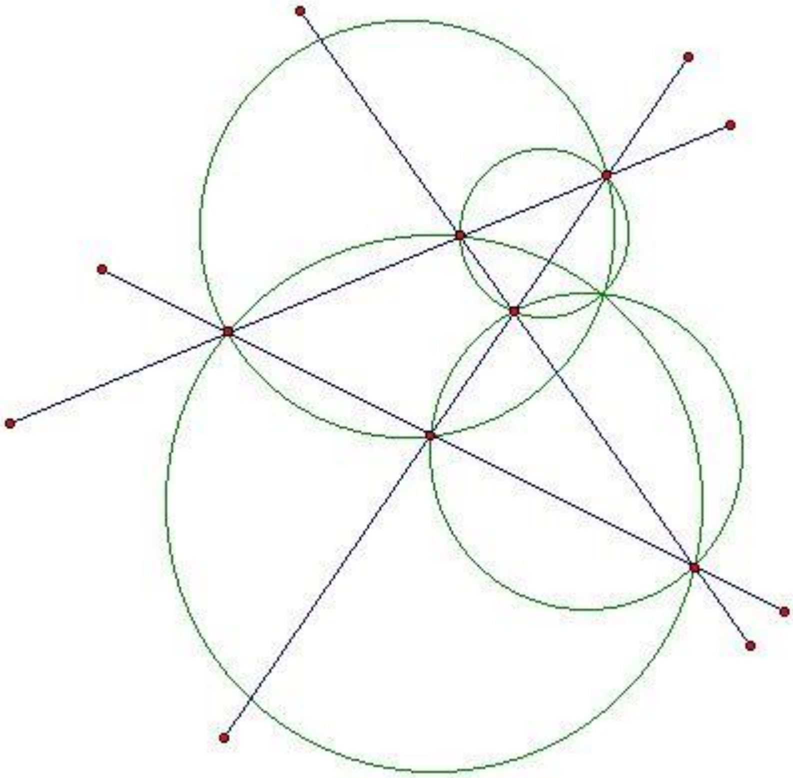
Темы курсовых работ
на 2012-2013 учебный год
профессор А.Л.Городенцев

1 курс	1. **Лемма Барта**: если ранг коммутатора двух линейных операторов равен единице, то у этих операторов есть общий собственный вектор (над алгебраически замкнутым полем). Решение можно подсмотреть в сборнике задач по линейной алгебре, составленном В.Прасоловым, но правильнее решить эту задачу самостоятельно. 2. **Гладкая плоская кубическая кривая не допускает рациональной параметризации**. И.Р.Шафаревич. *Основы алгебраической геометрии, т.1.*. М.Рид. *Алгебраическая геометрия для всех*, а также задачи 1.6 и 5.1 (соответственно, из 1-го и 5-го листков) курса A.L.Gorodentsev. *Algebraic Geometry. Start Up Course*, читаемого в Math In Moscow. 3. **Решение (в целых числах) уравнения Пелля $x^2+d\,y^2=N$ и группа единиц вещественного квадратичного поля.** К.Айрлэнд, М.Роузен. *Классическое введение в современную теорию чисел*. (§5 из гл.17) З.И.Боревич, И.Р.Шафаревич. *Теория чисел*. (§8 из гл.II) а также задачи А.Л.Городенцева, выдававшихся на семинаре Рудакова. 4. **Теорема Лиувилля** о том, что алгебраические числа приближаются рациональными дробями не лучше, чем с точностью до некоторой натуральной степени знаменателя дроби А.Я.Хинчин. *Цепные дроби*. (§9 из гл.2) 5. **Цепочка Клиффорда**. Имеется следующая серия задач, занумерованных натуральными числами *n*, начиная с *n=4*. При *n=4* четыре прямые на плоскости, находящихся в общем положении (любые две пересекаются в одной точке, через которую не проходит никая третья), ограничивают 4 треугольника. Оказывается, что описанные вокруг этих треугольников окружности пересекаются в одной точке, а их центры лежат на одной окружности. При *n=5* пять прямых в общем положении содержат внутри себя 5 четвёрок прямых, с каждой из которых, согласно предыдущему, связана точка пересечения четырёх окружностей, и окружность, проходящая через их центры. Оказывается, что эти 5 точек лежат на одной окружности, а пять окружностей - пересекаются в одной точке, а их центры лежат на одной окружности. При *n=6* имеется 6 пятёрок прямых, каждая из которых, по предыдущему, производит: (1) окружность, на которой лежат 5 точек пересечения четвёрок окружностей, (2) точку пересечения пяти окружностей (3) окружность, проходящую через центры 5 окружностей. Разумеется, шесть окружностей (1) пересекаются в одной точке, а их центры лежат на одной окружности; для шести окружностей (3) это, конечно, тоже верно; а шесть точек (2) лежат на одной окружности. И так далее. Историю вопроса и одно из возможных (и довольно таки старинных) решений с весьма оригинальным использованием комплексных чисел см. на сайтах http://www.gogeometry.com/clifford1.htm и

	 http://www.maa.org/editorial/knot/CenterCircle.html. 6. **Поризм Понселе**, простая часть: на плоскости (комплексной проективной) нарисованы две коники (приверженцам евклидовой геометрии рекомендутся представлять себе эллипс, лежащий внутри другого эллипса); из точки на одной из них (на внешнем эллипсе) выпускают касательную к другой (к внутреннему эллипсу) пока она снова не пересечёт первую конику (внешний эллипс); из полученной точки пересечения с первой коникой снова выпускают касательную ко второй конике до её пересечения с первой и т.д. — получается ломаная, вписанная в первую конику и описанная около второй; если эта ломаная замкнётся через n шагов в n-угольник, вписанный в первую конику и описанный около второй, то это явление будет иметь место *при любом выборе начальной точки на первой конике*, за исключением, разве что, конечного числа точек (в этом случае говорят, что две данные коники замкнуты друг с другом по Понселе). J.G.Semple, G.T.Kneebone. *Algebraic projective geometry*; J.G.Semple, L.Roth. *Introduction to algebraic geometry*; а также лекцию 3 из курса A.L.Gorodentsev. *Algebraic Geometry. Start Up Course*, читаемого в Math In Moscow. 7. **Теорема Безу** о том, что две кривые степеней m и n без общих компонент на плоскости (комплексной проективной) имеют ровно mn точек пересечения (если учитывать их с надлежащими кратностями, определяемыми простым и наглядным правилом Цейтена). Р. Уокер. *Алгебраические кривые*; J.G.Semple, G.T.Kneebone. *Algebraic projective geometry*; J.G.Semple, L.Roth. *Introduction to algebraic geometry*; а также лекции 10, 11 из курса A.L.Gorodentsev. *Algebraic Geometry*. *Start Up Course*, читаемого в Math In Moscow.
1-2 курс	8. **Теорема Дирихле о единицах** - одно из естественных развитий

	предыдущего сюжета (п.3 для 1 курса). Источники те же: К.Айрлэнд, М.Роузен и З.И.Боревич, И.Р.Шафаревич. 9. **Теорема Лагранжа о представлении вещественных квадратичных иррациональностей периодическими цепными дробями.** А.Я.Хинчин. *Цепные дроби*. (§10 из гл.2) а также задачи А.Л.Городенцева выдавашиеся на *contra*-семинаре 2008/09 года. 10. **Теорема Рота о том, что для трансцендентности вещественного числа необходимо и достаточно, чтобы оно имело бесконечно много приближений p/q с точностью до $q^{-2-\varepsilon}$** см п.4 для 1 курса Дж.В.С.Касселс. *Введение в теорию диофантовых приближений*. (гл.VI) P.M.Gruber, C.G.Lekkerkerker. *Geometry of numbers*. 11. **Поризм Понселе**, трудная часть: как по уравнениям двух коник выяснить, существуют ли для них вписанно-описанные многоугольники. P.Griffiths, J.Harris, On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism. L'Enseignement Mathematique, Vol.24 (1978) 12. **Соотношения Плюккера**: у плоской алгебраической кривой, особые точки которой исчерпываются к простыми остриями (где двойная касательная пересекает кривую с кратностью 3) и n простми самопересечениями кратностей $m_1,\ldots, m_n$ (в i-той точке пересекается m_i ветвей с различными касательными), число ι точек перегиба, степень d, и класс c (т.е. число касательных, которые можно опустить на кривую из точки общего положения) связаны соотношениями $c = d(d-1) - 3\kappa - \sum m_i(m_i-1)$ и $\iota = 3d(d-2) - 8\kappa - 3\sum m_i(m_i-1)$ лекции 10, 11 из курса A.L.Gorodentsev. *Algebraic Geometry. Start Up Course*, читаемого в Math In Moscow.
1-3 курс	13. **Цепочка Маркова**. Связь между: целыми решениями уравнения Маркова $x^2+y^2+z^2=3xyz$; вещественными числами, которые хуже всего приближаются рациональными; вполне приводимыми над R целочисленными квадратичными формами $F(x,y)$ с макисимальными минимумами величины $F(x,y)/det^{1/2}(F)$ по всем целым ненулевым (x,y); исключительными векторными раслоениями на проективной плоскости. Естественное обощение этой задачи - связь между цепочкой вполне вещественных кубических форм от трёх переменных и исключительными расслоениями на проективном пространстве до сих пор не изучена, а от самой этой цепочки форм вообще известно только самое начало - первые две формы (с наибольшим минимумом и следующим за ним), построенные Давенпортом в 1939-1943 г.г. С этой же задачей связана до сих пор не решённая проблема Маркова: пусть у двух троек решений уравнения Маркова совпадают максимальные элементы; верно ли, что это совпадающие тройки решений? Дж.В.С.Касселс. «Введение в теорию диофантовых приближений». A.L.Gorodentsev. S.A.Kuleshov. «Helix theory» Moscow Math. J. 4:2 (2004), p.377--440.

2-3 курс	14. **На любой гладкой кубической поверхности в трёхмерном пространстве (комплексном проективном) лежит ровно 27 прямых**. М.Рид. *Алгебраическая геометрия для всех* (§8 из гл.V), а также лекцию 14 из курса A.L.Gorodentsev. *Algebraic Geometry. Start Up Course*, читаемого в Math In Moscow. Можно вывести этот результат из того, что гладкая плоская кривая степени 4 имеет 28 двойных касательных (что следует из предыдущих соотношений Плюккера). 15. **Описание кольца когомологий комплексного грассманиана (исчисление Шуберта).** У. Фултон. «Таблицы Юнга и их применение в ...» и его же «Теория пересечений» Ф.Гриффитс, Дж.Харрис. «Принципы алгебраической геометрии» гл. 4.
3 курс-магистратура	16. **Построение полуортогонального разложения производной категории когерентных пучков на проективных пространствах и грассманианах. Изучение действия группы кос на полуортогональных базисах производных категорий и решёток Мукаи**. A.L.Gorodentsev. S.A.Kuleshov. «Helix theory» Moscow Math. J. 4:2 (2004), p.377--440. А также имеющиеся там ссылки. 17. **Описание алгебры сизигий проективной координатной алгебры грассманиана *Gr(k,n)*. В настоящее время ответы известны только для *k=2* (при всех *n*) и для *k=3*, *n=5*.** A.L.Gorodentsev, A.S.Khoroshkin, A.N.Rudakov. On syzygies of highest weight orbits. In: Moscow Seminar on Mathematical Physics, II. AMS Translations, ser. 2, vol. 221 (2007), p. 79--120.
3-4 курс, Магистратура Темы для группы из 2-3 человек	**18.** (3-6 курс) Алгебраическое векторное расслоение на комплексной проективной прямой является прямой суммой одномерных распоений $\mathcal O(d)$ (теорема Биркгофа-Гротендика). Неубывающая последовательность чисел d, встречающихся в разложении данного распоения называется типом расщепления этого расслоения. Задача: описать типы расщеплений ограничений на прямую исключительных расслоений на комплексных проективных пространствах. У меня нет сомнений, что описание типа расщепления ограничения на прямую исключительного расслоения на плоскости должно быть тесно связано с марковским описанием периодов из единиц и двоек, встречающихся в разложениях марковских квадратичных иррациональностей в непрерывные дроби. Подзадача: проверить эту догадку. Я считаю, что типы расщеплений ограничений исключительных расслоений с проективных пространств размерностей три и выше должны быть тесно связаны с диофантовыми приближениями вполне вещественных иррациональностей старших степеней. Об исключительных расслоениях можно прочиать в книге Rudakov A.N., et al. Helices and vector bundles [Seminaire Rudakov, CUP, 1990] (есть в колхозе) Известно, что все они стабильные, однородные, равномерные и

		вообще максимально хорошие. О числах Маркова см. материалы к моему докладу 13 октября 2008 года на семинаре http://vyshka.math.ru/f08/08F_sem_rudakov.html оригинальную работу Маркова "О квадратичных формах положительного определителя" (первая статья в томе сочинений Маркоа по теории чисел, что есть в колхозе), а также гл. 2 книгу Дж.Касселс "Диофантовы приближения" О расслоениях на проективных пространствах (в частности, теорему Грауэрта о том, что при ограничении стабильного расслоения на проективном пространстве на прямую соседние числа получающегося типа расщепления рознятся не более, чем на 1) можно прочитать в книге Оконек, Шпендлер, Шнайдер "Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах" (есть в колхозе) **19.** Симплектическое торическое многообразие - это 2n-мерное симплектическое многообразие, обладающее n коммутирующими гамильтонианами, которые слоят его над выпуклым многогранником в R^n со слоями - вещественными компактными торами (n-мерным над внутренними точками многогранника и вырождающимися на коразмерность грани над точками граней) Алгебраические торические многообразия вписываются в эту конструкцию (в качестве многогранника получится многогранник, кодирующий веер алгебраического торического многообразия). Имеются три замечательных интегрируемых системы, вписывающиеся в эту картинку, расслоенные над одним и тем же многогранником и могущие быть преобразованы одна в другую послойным симплектоморфизмом. Сиречь: многообразие модулей многоугольников (n-угольников) в R^3 с заданными длинами сторон, многообразие модулей параболических 2-расслоений над прямой с выколотыми точками и комплексный грассманиан Gr(2,n). В курсовой работе требуется разобраться с каждой из этих интегрируемых систем (в первых двух понять, а что это вообще за многообразие, какова симплектическая структура, что за n коммутирующих гамильтонианов, как устроен n-мерный многоранник на который они отображают систему, как переходить от одной системы к другой посредством послойных симплектоморфизмов). Это всё более-мненее известно (но ждёт обобщений) и написано в статьях: arXiv:0810.3470 Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions Takeo Nishinou, Yuichi Nohara, Kazushi Ueda arXiv:0812.0066 Potential functions via toric degenerations Takeo Nishinou, Yuichi Nohara, Kazushi Ueda и ссылках, которые в них даются. Новое и неизвестное: исследовать обобщённые уравнения Книжника-Замолодчикова на этих системах (как я объяснял в докладе по абелевой лагранжевой алгебраической геометрии на семинаре лаборатории прошлым июнем, обобщённое уравнение Книжника-Замолодчикова описывает связь между базисами в пространствах глобальных

	голоморфных сечений голоморфного раслоения предквантования на соответствующем келеровом торическом многообразии и комбинаторными данными, описывающими вещественную интегрируемую систему, расслоенную на торы над многогранником; в основе описания лежат торы Бора-Зоммерфельда, коих имеется конечное число в слоях вещественного расслоения на торы, и с каждым из которых связано базисное голоморфное сечение раслоения предквантования в голоморфной картинке).