Прикладные методы анализа. Листок 2. Функции Грина

Решение задач 2 (все пункты), 3,4, 7 (все пункты) входит в необходимые условия получения зачета и допуска к экзамену. Последний срок сдачи этих задач - 11 октября.

1. Докажите, что в точках разрыва оригинала с показателем роста $s < a$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$$

2. а) Решите задачи 4а и 4в листка 1, пользуясь формулой Дюамеля: $pF(p)G(p) \div f'(t) * g(t) + f(0)g(t)$.

   б) Напишите решение задачи Коши $x'' + x = e^{-t^2}$, $x(0) = x'(0) = 0$ в виде интеграла.

3. При подключении к электрической цепи (с отсутствующим начальным током и зарядами конденсаторов) источника постоянной э.д.с. напряжением в 2 вольта в ней на заданном участке цепи возник ток вида $i(t) = -1 + \cos 2t$ ампер. Какова будет временная зависимость тока на этом же участке при подключении э.д.с. вида $u(t) = \sin t$ вольт?

Пусть L - линейный дифференциальный оператор n-го порядка. Функцией Грина $G(t,s)$ для задачи Коши $L(x(t)) = f(t)$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$, ... $x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$ называется такая функция двух переменных, для которой решение этой задачи Коши (при $t > 0$) может быть представлено в виде $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)f(s)ds$.

4. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ - линейно-независимые решения однородного линейного дифференциального уравнения $u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = 0$. Покажите (например, методом вариации постоянной), что функция Грина $G(t,s)$ для задачи Коши $u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = f(t)$, $u(0) = 0, u'(0) = 0$ равна 0 при $t < s$, и имеет вид

$$G(t,s) = (u_1(t)u_2(s) - u_1(s)u_2(t))/(u_1(s)u_2'(s) - u_1'(s)u_2(s)) \qquad \text{при } t > s.$$

5. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ - линейно-независимые решения дифференциального уравнения $u''(t) + b(t)u(t) = 0$, удовлетворяющие условиям $u_1(0) = 0$, $u_2(1) = 0$. Покажите, что функция Грина однородной краевой задачи $u''(t) + b(t)u(t) = f(t)$, $u(0) = u(1) = 0$ пропорциональна функции

$$\tilde{G}(t,s) = \begin{cases} u_1(t)u_2(s), & t < s, \\ u_1(s)u_2(t), & t > s \end{cases}.$$

Найдите коэффициент пропорциональности.

6. Докажите, что функция Грина произвольной краевой задачи $L(x(t)) = f(t)$, $\alpha_0 x(t_0) + \beta_0 x'(t_0) = \gamma_0$, $\alpha_1 x(t_1) + \beta_1 x'(t_1) = \gamma_1$, где $L(x) = a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x$, $a(t) \neq 0, t \in [t_0, t_1]$ – линейный дифференциальный оператор 2-го порядка с непрерывными коэффициентами, существует, если найдется функция $G(t,s)$, удовлетворяющая (по t) уравнению $L(G(t,s)) = 0$ при $t \neq s$, краевым условиям, непрерывная при $t = s$, такая, что первая производная $G_t'(t,s)$ имеет разрыв первого рода со скачком, равным $a(s)$.

7. Найти функцию Грина следующих краевых задач для уравнения колебаний струны $u'' + k^2 u = f(x)$, $x \in [0,1]$:

   а) $u(0) = u(1) = 0$; б) $u'(0) = u'(1) = 0$.

8. Найти функцию Грина уравнения $u'' - k^2 u = f(x)$ с граничными условиями:

   а) $u(0) = 0$, функция $u(x)$ ограничена при $x \to \infty$ на полуоси $x \geq 0$;

   б) $u(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

9. Используя функцию Грина из задачи 8б, получить решение уравнения

$$\psi'' + k^2\psi = f(x), \qquad \operatorname{Im} k = 0$$

с граничным условием $\psi \to e^{ikx}$ при $x \to +\infty$; $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

10. При каких условиях на a и b разрешима краевая задача $u'' = f(x)$, $u'(0) = a$, $u'(1) = b$? Выпишите ее решение в случае существования.