Гиперболические группы по Громову

Еще в 1950-е А. Д. Александрову удалось выразить важное геометрическое свойства риманова многообразия - знак его кривизны - в виде неравенств для метрики на многообразии, которые имеют смысл в любом метрическом пространстве. Впоследствии эти неравенства были названы CAT-неравенствами, в честь Картана, Александрова и его ученика Топоногова. В работах Александрова и его школы (Громов, Бураго, Перельман и др.) этот подход получил множество применений в разных областях геометрии.

Граф Кэли группы с заданным набором образующих, есть граф, вершины которого соответствуют элементам группы, а ребра - элементам, которые отличаются на домножение на образующую. Громов предложил изучать дискретные группы, исходя из геометрических свойств их графа. Оказалось, что "отрицательной кривизне" (в смысле CAT-теории) графа Кэли отвечает весьма широкий класс групп; ныне эти группы называются "гиперболическими по Громову".

В число гиперболических групп входят решетки в группах Ли ранга 1, фундаментальные группы пространств отрицательной кривизны, свободные группы и много других. Также гиперболическими являются случайные группы, для подходящего определения "случайной группы". Громов доказал, что группа, заданная случайным набором k образующих и m соотношений длины l_1, ..., l_m, является гиперболической с вероятностью, которая стремится к 1, когда l_1, ..., l_m стремятся к бесконечности.

Гиперболические группы лишены многих патологий, которые затрудняют работу с более общими группами. Например, в гиперболических группах алгоритмически разрешима проблема различения слов, которая (как доказал П. С. Новиков) неразрешима в более общих группах.

С каждой гиперболической группой канонически связано конечномерное, компактное топологическое пространство, которое называется ее границей. Если эта группа была фундаментальной группой компактного многообразия постоянной отрицательной кривизны, универсальное накрытие которого можно реализовать как внутренность многообразия с краем dM, то граница группы гомеоморфна dM. Многие свойства гиперболических групп восстанавливаются из топологических свойств ее границы; так, dG гомеоморфно канторовскому множеству тогда и только тогда, когда G содержит свободную подгруппу конечного индекса.

Я изложу основы метрической геометрии по Александрову и Громову, определю гиперболические группы, и расскажу про применение методов Громова в теории групп.

План.

1. Метрические пространства, внутренние метрики, геодезические, теорема Хопфа-Ринова.
2. CAT-неравенства, CAT(0)-пространства, теорема Картана-Адамара.
3. Гиперболические группы, квазиизометрии метрических пространств, основные примеры гиперболических и негиперболических групп.
4. Изопериметрическое неравенство и алгоритмическая разрешимость проблемы различения слов в гиперболических группах.
5. (*) Случайные группы по Громову; гиперболичность случайных групп.
6. (*) Граница гиперболического пространства по Громову и ее свойства. Граница гиперболической группы.

Курс рассчитан на всех желающих, начиная от второго курса. Требуется знакомство с основами топологии (компакты, накрытия, универсальные накрытия, фундаментальная группа) и базовыми понятиями метрической геометрии.

Полезная литература

М. Громов, "Гиперболические группы", Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002

П. де ля Арп, Э. Гис, "Гиперболические группы по Михаилу Громову", 1992, Москва, Мир.

M. Gromov, http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/4%5B92%5D "Asymptotic invariants of infinite groups." Geometric group theory. Volume 2 Proc. Symp. Sussex Univ., Brighton, July 14-19, 1991 Lond. Math. Soc. Lecture Notes 182 Niblo and Roller ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993), 1-295.

Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В., Курс метрической геометрии, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 512 стр

Ilya Kapovich and Nadia Benakli, "Boundaries of hyperbolic groups", Combinatorial and Geometric Group Theory (R.Gilman, et al, editors), Contemporary Mathematics, vol. 296, 2002, pp. 39-94, http://www.math.uiuc.edu/~kapovich/PAPERS/bry1.pdf

Сайты

http://berstein.wordpress.com/2011/07/03/boundaries-of-hyperbolic-groups/

Berstein seminar on geometric group theory

http://www.ihes.fr/~gromov/topics/topic6.html

Infinite groups: curvature, combinatorics, probability, asymptotic geometry

http://www.yann-ollivier.org/rech/index

Yann Ollivier, Random groups and geometric group theory