Темы возможных курсовых работ
под руководством проф. А.А.Глуцюка[1]

Проблема исключительных минимальных множеств для ростков голоморфных векторных полей.

Одна из основных проблем теории голоморфных слоений - это классическая проблема исключительных минимальных множеств, поставленная С.Камачо (C.Camacho), Эта проблема состоит в следующем. Рассмотрим полиномиальное векторное поле в $\mathbb{C}^2$ и его комплексный фазовый портрет: голоморфное слоение на аналитические кривые (комплексные фазовые кривые поля) с особенностями. Оно продолжается до *голоморфного слоения на аналитические кривые* (комплексные листы) с изолированными особенностями в $\mathbb{CP}^2$. И обратно, всякое голоморфное слоение с изолированными особенностями на аналитические кривые в $\mathbb{CP}^2$ в каждой аффинной карте является фазовым портретом полиномиального векторного поля.

Проблема 1. Верно ли, что всякий лист произвольного голоморфного слоения с изолированными особенностями на аналитические кривые в $\mathbb{CP}^2$ накапливается хотя бы к одной особой точке?

Определение. *Инвариантным множеством* слоения называется объединение некоторых его листов. Замкнутое инвариантное множество называется *минимальным,* если оно не содержит меньших замкнутых инвариантных множеств.

Следующая проблема эквивалентна Проблеме 1.

Проблема 2. Верно ли, что всякое минимальное множество голоморфного слоения с изолированными особенностями на аналитические кривые в $\mathbb{CP}^2$ содержит особую точку?

Это - открытые проблемы, возраста нескольких десятилетий.

Замечание. В проблемах 1 и 2 важно, что объемлющее многообразие - проективная плоскость. В общем случае, утверждение неверно. Контрпример: тривиальное расслоение прямого произведения двух римановых поверхностей. В этом случае особых точек нет, и каждый слой является минимальным множеством.

Рассматриваемый проект курсовой работы относится к локальной версии вышеупомянутых проблем. Чтобы ее сформулировать, введем следующее определение.

Определение. Рассмотрим росток голоморфного векторного поля v в $\mathbb{C}^n$ с (изолированной) особой точкой в начале координат. Фиксируем окрестность нуля U и рассмотрим комплексный фазовый портрет поля в U: слоение на связные аналитические кривые в U с изолированной особой точкой 0.

[1]А.А.Глуцюк планирует быть в ВШЭ во втором семестре, начиная с 11 января 2013 г. Готов обсуждать предмет курсовой со всеми, кто заинтересуется, как до, так и после приезда в ВШЭ, как лично, так и по e-mail: aglutsyu@ens-lyon.fr

Определение минимального множества фазового портрета в U аналогично предыдущему, где $U = \mathbb{CP}^2$. А именно, инвариантное множество - это объединение неточечных комплексных фазовых кривых в U; фазовые кривые могут примыкать к границе области U. Минимальное замкнутое инвариантное множество называется *исключительным,* если оно не содержит особой точки и не является одномерным аналитическим подмножеством в U.

Проблема 3. Верно ли, что ограничение голоморфного векторного поля с изолированной особой точкой на любую достаточно малую окрестность особой точки не имеет исключительных минимальных множеств?

Проблема 3 представляется более доступной, чем проблемы 1 и 2, и тесно связана с уже решенной проблемой существования сепаратрисы в особой точке голоморфного векторного поля. Известно, что сепаратриса, проходящая через особую точку, всегда существует в размерности два [1] и не обязана существовать в высших размерностях [2].

Следующая задача представляется упражнением. В то же время, насколько мне известно, этот результат не опубликован.

Задача 4. Доказать, что проблема 3 имеет положительное решение в размерности два.

После того, как решена задача 4, можно попробовать следующую задачу.

Задача-проблема 5. Рассмотреть примеры Гомес-Монта и Лоэнги [2] ростков трехмерных голоморфных векторных полей без сепаратрис в особой точке. Исследовать существование исключительных минимальных множеств, т.е. проблему 3 для этих примеров.

Подготовительный материал см. в книге Yu.S.Ilyashenko, S.Yu.Yakovenko [3]. Или в книге В.И.Арнольда "Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений". Или обзор Арнольда и Ильяшенко в книге ВИНИТИ "Динамические Системы - 1". Одна из главных теорем подготовительного материала, которые следует изучить - теорема Зайденберга о разрешении особенностей ростков двумерных голоморфных векторных полей последовательностью раздутий. При этом получается новое векторное поле, у которого все особые точки - элементарны.

Список литературы.

[1] Camacho, C.; Sad, P. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. - Ann. Math. 115 (1982), 579–595.

[2] Xavier Gomez-Mont, Ignacio Luengo. Germs of holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^3$ without a separatrix. - Invent. Math. 109 (1992), 211–219.

[3] Ilyashenko, Yu.S.; Yakovenko, S.Yu. Lectures on analytic differential equations. - Graduate Studies in Mathematics 86, AMS, Providence, RI 2008.