Топологические и метрические свойства операторов

Определение 2.1. Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется

- *топологически инъективным*, если он осуществляет гомеоморфизм между X и $T(X)$;
- *изометрией*, если $\|Tx\| = \|x\|$ для всех $x \in X$;
- *открытым*, если он переводит открытые множества в открытые;
- *коизометрией*, если он отображает открытый единичный шар $U_1^X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ пространства X на открытый единичный шар пространства Y.

2.1. Докажите, что ограниченный линейный оператор $T\colon X \to Y$ топологически инъективен тогда и только тогда, когда существует такое $c > 0$, что $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ для всех $x \in X$ (это свойство оператора иногда называют *ограниченностью снизу*).

2.2. Докажите, что следующие свойства линейного оператора $T\colon X \to Y$ эквивалентны:

(i) T открыт;
(ii) существует такое $\varepsilon > 0$, что $T(U_1^X) \supseteq U_\varepsilon^Y$, где $U_\varepsilon^Y = \{y \in Y : \|y\| < \varepsilon\}$;
(iii) существует такое $C > 0$, что для каждого $y \in Y$ найдется такой $x \in X$, что $Tx = y$ и $\|x\| \leqslant C\|y\|$.

2.3. Докажите, что коизометрический линейный оператор между нормированными пространствами открыт, а открытый — сюръективен.

2.4. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть $V = \ell^p$ или c_0. При каких условиях на λ диагональный оператор

$$M_\lambda\colon V \to V, \quad (x_1, x_2, \dots) \mapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots),$$

1) инъективен; **2)** сюръективен; **3)** топологически инъективен; **4)** открыт; **5)** изометричен; **6)** коизометричен?

2.5. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $f\colon X \to \mathbb{C}$ — ограниченная измеримая функция. Ответьте на вопросы предыдущей задачи для оператора умножения $M_f\colon L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$, $g \mapsto fg$.

Факторпространства

Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство, $Q\colon X \to X/X_0$, $x \mapsto x + X_0$, — факторотображение.

2.6. Предположим, что на X/X_0 существует такая норма, что Q непрерывно. Докажите, что X_0 замкнуто в X.

Определение 2.2. *Факторполунорма* на X/X_0 определяется формулой

$$\|x + X_0\|^\wedge = \inf\{\|x + y\| : y \in X_0\}. \tag{1}$$

2.7. 1) Докажите, что (1) — полунорма на X/X_0.
2) Докажите, что (1) — норма тогда и только тогда, когда X_0 замкнуто в X.
3) Докажите, что Q отображает открытый единичный шар $U_1^X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ пространства X на открытый единичный шар пространства X/X_0.

Таким образом, п. (3) задачи 2.7 означает, что для любого замкнутого векторного подпространства $X_0 \subseteq X$ факторотображение $Q\colon X \to X/X_0$ — коизометрия.

2.8. Что можно сказать про норму коизометрического оператора?

2.9. Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство. Докажите, что топология на X/X_0, порожденная факторполунормой (1), является фактортопологией топологии на X (т.е. подмножество $U \subseteq X/X_0$ открыто тогда и только тогда, когда $Q^{-1}(U)$ открыто в X).

2.10. Пусть X и Y — нормированные пространства, $X_0 \subseteq X$ — замкнутое векторное подпространство, $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор, удовлетворяющий условию $T(X_0) = 0$. Обозначим через $\widehat{T}\colon X/X_0 \to Y$ линейный оператор, индуцированный оператором T (т.е. оператор, действующий по формуле $\widehat{T}(x + X_0) = T(x)$). Докажите, что $\widehat{T}$ ограничен и $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

2.11. В обозначениях предыдущей задачи предположим, что $X_0 = \operatorname{Ker} T$ (это равносильно тому, что $\widehat{T}$ инъективен). Докажите, что
1) $\widehat{T}$ — топологический изоморфизм тогда и только тогда, когда T открыт;
2) $\widehat{T}$ — изометрический изоморфизм тогда и только тогда, когда T коизометричен.

Мораль: в категории нормированных пространств (в отличие от категории модулей над кольцом) фактор по ядру не всегда канонически изоморфен образу. По этой причине категория нормированных пространств не является абелевой.

2.12. Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $B(X)$ — пространство всех ограниченных измеримых функций на X, снабженное равномерной нормой. Постройте изометрический изоморфизм между $L^\infty(X, \mu)$ и некоторым факторпространством пространства $B(X)$.

2.13. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — замкнутое векторное подпространство. Верно ли, что у любого вектора из X/X_0 есть представитель в X, имеющий ту же норму?

2.14. 1) Докажите, что подмножество сепарабельного метрического пространства сепарабельно.
2) Пусть X и Y — топологические пространства. Докажите, что если X сепарабельно и существует непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ с плотным образом, то и Y сепарабельно.
3) Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — замкнутое векторное подпространство. Докажите, что X сепарабельно тогда и только тогда, когда X_0 и X/X_0 сепарабельны.

2.15. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — замкнутое векторное подпространство.
1) Докажите, что если X полно, то и X/X_0 полно.
2) Докажите, что если X_0 и X/X_0 полны, то и X полно.