Листок 5. Мера. Борелевские и измеримые множества в $\mathbb{R}^n$

Анализ, 2 курс, **30.10.2012**

5◇1 Пусть X — множество. Докажите, что σ-алгебра, порожденная всеми конечными подмножествами X, состоит из всех тех множеств $A \subseteq X$, для которых либо A, либо $X \setminus A$ не более чем счетно.

5◇2$^{\mathrm{O}}$ Докажите, что борелевская σ-алгебра на прямой порождается любым из следующих классов множеств: **а)** все интервалы; **б)** все отрезки; **в)** все полуинтервалы вида $[a, b)$; **г)** все полуинтервалы вида $(a, b]$; **д)** все лучи вида $[a, +\infty)$; **е)** все лучи вида $(a, +\infty)$; **ж)** все лучи вида $(-\infty, a]$; **з)** все лучи вида $(-\infty, a)$.
и) Докажите, что в каждом из предыдущих пунктов достаточно рассматривать промежутки лишь с рациональными концами.

5◇3 **а)** Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n$ — борелевское множество. Докажите, что aE (где $a \in \mathbb{R}$) и $E + v$ (где $v \in \mathbb{R}^n$) — борелевские множества.
б) Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^2$ — борелевское множество. Докажите, что все его сечения $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ — борелевские множества.

5◇4 (*канторово множество*). Для отрезка $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ положим $I^{(1)} = [a, a + \frac{b-a}{3}] \sqcup [b - \frac{b-a}{3}, b]$ (т.е. из отрезка выкидывается его «средняя треть»). Для подмножества $F \subset \mathbb{R}$, представимого в виде конечного дизъюнктного объединения отрезков $F = \bigsqcup I_k$, положим $F^{(1)} = \bigsqcup I_k^{(1)}$. По индукции определим множества $F^{(n)} = (F^{(n-1)})^{(1)}$ $(n \geqslant 2)$. Наконец, положим $I = [0, 1]$ и определим *канторово множество* C формулой $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^{(n)}$.
а$^{\mathrm{O}}$) Подмножество Y топологического пространства X называется *совершенным*, если оно замкнуто и не имеет изолированных точек. Докажите, что C — совершенное подмножество $\mathbb{R}$.
б$^{\mathrm{O}}$) Подмножество Y топологического пространства X называется *нигде не плотным*, если его замыкание имеет пустую внутренность. Докажите, что C нигде не плотно в $\mathbb{R}$.
в$^{\mathrm{O}}$) Докажите, что C имеет мощность континуума.
г$^{\mathrm{O}}$) Представим каждое число на $[0, 1]$ в виде бесконечной троичной дроби. Какие троичные дроби соответствуют точкам из C?
д$^{\mathrm{O}}$) Подмножество $Y \subset \mathbb{R}$ называется *множеством меры нуль*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность интервалов $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, что $Y \subseteq \bigcup I_n$ и $\sum_n |I_n| < \varepsilon$, где $|I_n|$ — длина I_n. Докажите, что C — множество меры нуль.
е) Опишите множества $C + C$ и $C - C$.
ж) Найдите такие множества $A, B \subset \mathbb{R}$ меры нуль, что $A + B = \mathbb{R}$.

5◇5 **а)** Модифицируйте конструкцию канторова множества и докажите, что для каждого $a \in (0, 1)$ существует нигде не плотное замкнутое множество $K_a \subset [0, 1]$ меры a. (На математическом слэнге его именуют *“жирным Кантором”*.)
Замечание. Для решения этой задачи не обязательно знать, как строится мера Лебега на прямой (см. лекцию 7.11.2012); достаточно знать, что она определена на некоторой σ-алгебре подмножеств $\mathbb{R}$, содержащей все открытые множества, и что мера Лебега интервала равна его длине.
б) Существует ли нигде не плотное подмножество отрезка $[0, 1]$, имеющее меру 1?

5◇6$^{\mathrm{O}}$ Докажите, что каждое из следующих свойств меры μ на алгебре множеств $\mathscr{A} \subseteq 2^X$ равносильно ее σ-аддитивности:
а) для любой неубывающей последовательности $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ множеств из $\mathscr{A}$, такой, что $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$, выполнено $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$;
б) для любой невозрастающей последовательности $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ множеств из $\mathscr{A}$, такой, что $\mu(A_k) < \infty$ для некоторого k и $\bigcap_n A_n \in \mathscr{A}$, выполнено $\mu(\bigcap_n A_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$;

в) для любой невозрастающей последовательности $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ множеств из $\mathscr{A}$, такой, что $\mu(A_k) < \infty$ для некоторого k и $\bigcap_n A_n = \varnothing$, выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$;

г) μ обладает свойством *σ-полуаддитивности*: для любой последовательности (A_n) множеств из $\mathscr{A}$, такой, что $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$, выполнено $\mu(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$.

5◇7 Равносильны ли утверждения из пп. б) и в) предыдущей задачи σ-аддитивности меры μ, если снять условие “$\mu(A_k) < \infty$ для некоторого k”?

Определение **1.** Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность подмножеств множества X. Ее *верхний предел* и *нижний предел* определяются формулами $\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geqslant n} A_k$, $\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_n \bigcap_{k\geqslant n} A_k$. Иначе говоря, $\overline{\lim}\, A_n$ состоит из тех точек, которые входят в бесконечное число A_n-ых, а $\underline{\lim}\, A_n$ — из тех точек, которые входят во все A_n, начиная с некоторого. В частности, всегда $\underline{\lim}\, A_n \subseteq \overline{\lim}\, A_n$. Последовательность (A_n) будем называть *сходящейся*, если $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n$.

5◇8 Пусть μ — σ-аддитивная мера на σ-алгебре множеств $\mathscr{A} \subseteq 2^X$, $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$.

а) Докажите, что $\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leqslant \underline{\lim}\, \mu(A_n)$ и $\mu(\overline{\lim}\, A_n) \geqslant \overline{\lim}\, \mu(A_n)$.

б) Докажите, что если (A_n) сходится, то $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$.

в) Докажите, что условие п. б) влечет σ-аддитивность μ.

г) (*лемма Бореля–Кантелли*). Докажите, что если $\sum_n \mu(A_n) < \infty$, то $\mu(\overline{\lim}\, A_n) = 0$. (Вероятностная интерпретация: если ряд из вероятностей событий сходится, то с вероятностью единица может произойти лишь конечное число этих событий.)

5◇9$^{\text{O}}$ (*меры Стилтьеса*). Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра (не σ-алгебра!) подмножеств полуинтервала $(0,1]$, порожденная всеми полуинтервалами вида $(a,b]$ $(a,b \in (0,1],\ a < b)$. Пусть $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция.

а) Докажите, что на $\mathscr{A}$ существует единственная мера μ_F, такая, что $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ для любого полуинтервала $(a,b] \subseteq (0,1]$.

б) Докажите, что любая конечная мера на $\mathscr{A}$ имеет указанный вид.

в) Придумайте условие на функцию F, необходимое и достаточное для того, чтобы μ_F была σ-аддитивна.

г) Предположим, что μ_F σ-аддитивна. Продолжим ее на σ-алгебру, содержащую все борелевские подмножества $(0,1]$, тем же способом, что и меру Лебега (см. лекцию 7.11.2012). Вычислите значения μ_F на всевозможных отрезках, интервалах и полуинтервалах.

5◇10* Дана последовательность шаров, радиусы которых стремятся к нулю, а сумма объемов бесконечна. Докажите, что в куб можно положить конечное число шаров из этой последовательности таким образом, что они заполнят 0.99 его объема.

5◇11* Пусть X — множество, $\mathscr{C}$ — некоторое семейство его подмножеств. Положим $\mathscr{B}_0 = \mathscr{C} \cup \{X \setminus A : A \in \mathscr{C}\}$, $\mathscr{B}_1 = \left\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathscr{B}_0\right\}$, $\mathscr{B}_2 = \left\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathscr{B}_1\right\}$, и т.д. Более общим образом, для каждого счетного ординала α положим $\mathscr{B}_\alpha = \left\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{B}_\beta\right\}$. Наконец, положим $\mathscr{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathscr{B}_\alpha$, где ω_1 — первый несчетный ординал.

а) Докажите, что $\mathscr{B}$ — σ-алгебра, порожденная $\mathscr{C}$ (т.е. наименьшая σ-алгебра подмножеств X, содержащая $\mathscr{C}$). В частности, если X — топологическое пространство и $\mathscr{C}$ — семейство всех его открытых подмножеств, то $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра.

б) Докажите, что σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$ имеет мощность континуума c.

в) Докажите, что σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^n$ имеет мощность 2^c. Как следствие, в $\mathbb{R}^n$ существуют измеримые по Лебегу неборелевские множества.

Об ординалах можно прочитать в книге Верещагина и Шеня «Начала теории множеств»; см. `http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part1-2.pdf`.