Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 8 задач (каждый подпункт считается отдельной задачей). В случае решения бо́льшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На зачете разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, на задачи, разобранные на семинарах, и на сданные Вами задачи из листков.

## Вариант 1

**1.** Приведите пример ограниченного линейного оператора в пространстве $\ell^2$, имеющего незамкнутый образ.

**2.** Снабдим пространство $C^n[a,b]$ нормой $\|f\|_{C^n} = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty$, где $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

**1)** Докажите полноту $C^n[a,b]$ относительно нормы $\|\cdot\|_{C^n}$.
**2)** Полно ли $C^n[a,b]$ относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$?
**3)** Сепарабельно ли $C^n[a,b]$ относительно нормы $\|\cdot\|_{C^n}$?

**3.** Найдите норму оператора $T\colon C[0,1]\to C[0,1]$, действующего по формуле

$$(Tf)(x) = f(0)e^x - \int_0^x t^2 f(t)\,dt + xf(x).$$

**4.** Выясните, плотна ли линейная оболочка системы функций $e_n(x) = e^{inx}$ $(n\in\mathbb{Z})$ в пространстве $L^2[a,b]$, если **1)** $b-a\leqslant 2\pi$; **2)** $b-a>2\pi$.

*Указание*: разрешается пользоваться теоремой Вейерштрасса, согласно которой линейная оболочка этой системы плотна в пространстве $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ непрерывных $2\pi$-периодических функций на $\mathbb{R}$, снабженном равномерной нормой.

**5.** Пусть $H$ — $n$-мерное гильбертово пространство, и пусть

$$F = \left\{ x = \sum_{k=0}^\infty x_k : x_k \in H^{\otimes k},\ \|x\| = \Big(\sum_{k=0}^\infty \|x_k\|^2\Big)^{1/2} < \infty \right\}$$

— пространство Фока. Зафиксируем ортонормированный базис $(e_1,\ldots,e_n)$ в $H$.
**1)** Докажите, что для каждого $i=1,\ldots,n$ существует единственный ограниченный линейный оператор $S_i\colon F\to F$, удовлетворяющий условию $S_i(x) = e_i\otimes x$ для всех $x\in H^{\otimes k}$ и всех $k\geqslant 0$.
**2)** Зафиксируем $k\geqslant 0$ и положим $W_k = \{1,\ldots,n\}^k$. Для каждого $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in W_k$ положим $S_\alpha = S_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot S_{\alpha_k}$. Докажите, что для любых $c_\alpha\in\mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\Big\|\sum_{\alpha\in W_k} c_\alpha S_\alpha\Big\| = \Big(\sum_{\alpha\in W_k} |c_\alpha|^2\Big)^{1/2}.$$

Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 8 задач (каждый подпункт считается отдельной задачей). В случае решения бóльшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На зачете разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, на задачи, разобранные на семинарах, и на сданные Вами задачи из листков.

## Вариант 2

**1.** Приведите пример ограниченного линейного оператора в пространстве $C[0,1]$, имеющего незамкнутый образ.

**2.** Рассмотрим векторное пространство $bv_0$, состоящее из всех числовых последовательностей $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условиям $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| < \infty$. Введем на $bv_0$ норму $\|x\|_{bv_0} = \|x\|_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$, где $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

**1)** Докажите полноту $bv_0$ относительно нормы $\|\cdot\|_{bv_0}$.

**2)** Полно ли $bv_0$ относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$?

**3)** Сепарабельно ли $bv_0$ относительно нормы $\|\cdot\|_{bv_0}$?

**3.** Найдите норму оператора $T\colon C[-1,1] \to C[-1,1]$, действующего по формуле

$$(Tf)(x) = f(0)\cos x + \int_{-1}^{0} t^3 f(t)\,dt - \int_{0}^{1} t^2 f(t)\,dt.$$

**4.** Найдите ортогональные дополнения следующих подпространств в $L^2[0,1]$: **1)** многочлены от $x$ (где $x$ — координата на $\mathbb{R}$) с нулевой суммой коэффициентов; **2)** многочлены от $x^2$.

*Указание*: разрешается пользоваться теоремой Вейерштрасса, согласно которой пространство многочленов от $x$ плотно в $C[0,1]$ относительно равномерной нормы.

**5.** Пусть $H$ — $n$-мерное гильбертово пространство, и пусть

$$F = \left\{ x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k : x_k \in H^{\otimes k},\ \|x\| = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2\Big)^{1/2} < \infty \right\}$$

— пространство Фока. Зафиксируем ортонормированный базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $H$.

**1)** Докажите, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ существует единственный ограниченный линейный оператор $T_i\colon F \to F$, удовлетворяющий условиям $T_i(\mathbb{C}) = 0$ (где $\mathbb{C} = H^{\otimes 0}$) и $T_i(x \otimes \xi) = (x, e_i)\xi$ для всех $x \in H$, $\xi \in H^{\otimes k}$ и $k \geqslant 0$.

**2)** Докажите, что для любых $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\Big\|\sum_i c_i T_i\Big\| = \Big(\sum_i |c_i|^2\Big)^{1/2}.$$