1. Прикладные методы анализа. Листок 3. ТФКП и обобщенные функции

Обязательные задачи: 1-6. Срок сдачи - 25 октября.

В этом листке под обобщенными функциями понимаются непрерывные линейные функционалы на пространстве D гладких финитных функций на вещественной прямой.

1. Пусть $z = x + iy \equiv re^{i\phi}$, где $r > 0$ (при $z \neq 0$) и $-\pi < \phi < \pi$. Обозначим $\phi = \arg z$.
   а) определим $\ln z$ как ветвь многозначной аналитической функции $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, определенную на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси и совпадающую с элементарной функцией $\ln z$ для действительных положительных z. Покажите, что $\ln z = \ln|z| + i\arg z$. Выразите $\ln z$ через элементарные функции переменных x, y.
   б) Верно ли, что $\ln z^2 = 2\ln z$ и $\ln|z|^2 = \ln z + \ln \overline{z}$.

2. Покажите, что следующие функции стремятся к $\delta(x)$ при $\varepsilon \to 0$:
$$a)\frac{1}{2\varepsilon}\chi_{-\varepsilon,\varepsilon};\qquad \text{б)}\ \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2};\qquad \text{в)}\ \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-x^2/4\varepsilon};\qquad \text{г)}\ \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

3. Вычислите следующие обобщенные функции как функционалы на основных:
$$a)\ x^k\delta^{(l)}(x);\qquad \text{б)}\ [x]';\qquad \text{в)}\ \left(v.p.\frac{1}{x}\right)'.$$

4. а) Опишите все решения уравнения $y'(t) = 0$ в обобщенных функциях.
   б) Опишите все решения уравнения $t \cdot y(t) = 0$ в обобщенных функциях.

5. Покажите, что функция $\ln|x|$ локально интегрируема на вещественной прямой. Найдите ее производную в классе обобщенных функций.

6. Пусть $L = a(t)\frac{d^2}{dt^2} + b(t)\frac{d}{dt} + c(t)$ -дифференциальный оператор с гладкими на отрезке $[a, b]$ коэффициентами. Дифференциальный оператор M называется дуальным к L относительно скалярного произведения $(u, v) = \int_a^b u(t)v(t)dt$, если для любых гладких на $[a, b]$ функций $u(t)$ и $v(t)$ разность скалярных произведений $(Lu, v) - (u, Mv)$ зависит только от значений u, v и их производных на концах отрезка.
   а) Выпишите M, зная L;
   б) Покажите, что всякий самодуальный дифференциальный оператор 2-го порядка может быть представлен в виде $L = \frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{d}{dt}\right) + c(t)$, и
$$(Lu, v) - (u, Lv) = a(t)\left(u'(t)v(t) - u(t)v'(t)\right)|_{t=a}^{t=b};$$
   в) выведите аналогичные результаты для комплекснозначных функций и операторов на отрезке с эрмитовым скалярным произведением $(u, v) = \int_a^b \bar{u}(t)v(t)dt$;
   г) Пусть $u(t)$ - непрерывно дифференциируемая на отрезке $[a, b]$ функция, равная нулю вне отрезка. Вычислите $L(u)$ в классе обобщенных функций (L самодуален).

7.* Пусть D - область на плоскости, $p, q \in C^1(D)$. Покажите, что дифференциальный оператор $L(u) = (pu'_x)'_x + (pu'_y)'_y - qu$ самодуален в D и для любых $u, v \in C^1(D)$ справедлива формула Грина
$$\iint_D (L(u)v - uL(v))\,dx\,dy = \int_{\partial D} p\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$
где n - внешняя нормаль к границе ∂D, ds - дифференциал длины дуги.

8. Покажите, что обобщенная функция $\delta(x)$ не может быть представлена никакой локально интегрируемой на прямой функцией.

9. а)* Докажите, что функция Эйри $\operatorname{Ai}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\left(\frac{1}{3}t^3 + zt\right)dt$ - единственное, с точностью до постоянного множителя, решение уравнения Эйри $w'' = tw$, убывающее вдоль положительной вещественной оси. Найдите другое независимое решение уравнения Эйри.
   б) Покажите, что функция $\operatorname{Ai}\left(e^{2\pi i/3}z\right)$ - тоже решение уравнения Эйри.
   в)* Докажите, что $\operatorname{Ai}(z) + e^{2\pi i/3}\operatorname{Ai}\left(e^{2\pi i/3}z\right) + e^{-2\pi i/3}\operatorname{Ai}\left(-e^{2\pi i/3}z\right) = 0$.