Листок 6: Тензорное произведение

Задачи по коммутативной алгебре - матфак ВШЭ

надо сдать до 23.11.2012 включительно

1 Сравните $\mathbf{Z}[[T]] \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}[[T]]$, а также $\prod_{n\in\mathbf{N}}((\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})$ и $(\prod_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

2 Пусть I, J – идеалы в кольце A. Покажите, что $A/I \otimes_A A/J = A/(I+J)$.

3 Пусть M, N – конечно порожденные модули над локальным кольцом A. Покажите, что если $M \otimes_A N = 0$, то $M = 0$ или $N = 0$ (указание: используйте лемму Накаямы).

4 Пусть A – целостное локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал, $K = Frac(A)$ и $k = A/\mathfrak{m}$. Пусть M – конечно порожденный A-модуль. Покажите, что $dim_k(M \otimes_A k) \geq dim_K(M \otimes_A K)$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда M свободен. Указание: сначала выведите из леммы Накаямы, что если $(e_1, \ldots, e_r)$ – базис M/mM, а x_i - некоторые прообразы e_i в M, то x_i, $1 \leq i \leq r$, порождают M.

5 Пусть A – кольцо, $\phi : A^m \to A^n$ – сюръекция A-модулей. Используя тензорное произведение, покажите, что $m \geq n$.

6 В условиях предыдущей задачи покажите, что если $m = n$, то ϕ изоморфизм. Указание: по задаче 5 из листка 4, достаточно разобрать случай локального кольца.

7 Пусть S - некоторое мультипликативно замкнутое подмножество кольца A. Покажите, что $S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$.

8 A-модуль называется плоским, если тензорное умножение на него сохраняет точность последовательностей A-модулей. Покажите, что $S^{-1}A$ – плоский A-модуль.

9 Опишите делители нуля в алгебрах $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ и $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{3})$. Разложите эти конечные алгебры над полем в прямое произведение полей (ср. с задачами листка 2 о структуре конечных алгебр над полем). Напомним, что структура кольца на тензорном произведении колец вводится формулой $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$.

10 Можно ли разложить $\mathbf{F}_p(X) \otimes_{\mathbf{F}_p(X^p)} \mathbf{F}_p(X)$ в прямое произведение полей? Здесь $\mathbf{F}_p(X)$ обозначает поле рациональных функций одной переменной над полем из p элементов, а $\mathbf{F}_p(X^p)$ – его подполе, состоящее из функций от X^p.