## Нормы операторов. Пространство $L^\infty$

Разбирались задачи ДЗ5.3–ДЗ5.5 из домашнего задания и 1.12 из листка 1. Ответы:

ДЗ5.3: 1), 2) $\lambda$ ограничена; 3) $\|M_\lambda\| = \sup_n |\lambda_n|$.
1.12: 1) 1; 2) 1.

Мы уже определили пространства $L^p(X,\mu)$ (где $(X,\mu)$ — пространство с мерой) для всех $p \in [1,+\infty)$. Определим теперь пространство $L^\infty(X,\mu)$. Обозначим через $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ множество всех существенно ограниченных измеримых функций на $X$.

**Упражнение 7.1. 1)** Докажите, что $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ — векторное подпространство в пространстве всех функций на $X$.
**2)** Докажите, что формула $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$ задает полунорму на $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$.

Положим $N = \{f \colon X \to \mathbb{C} : f = 0 \text{ п.в.}\}$ и $L^\infty(X,\mu) = \mathscr{L}^\infty(X,\mu)/N$. Таким образом, $L^\infty(X,\mu)$ состоит из классов $\mu$-эквивалентности существенно ограниченных измеримых функций на $X$.

**Упражнение 7.2. 1)** Докажите, что формула $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$ корректно задает норму на пространстве $L^\infty(X,\mu)$.
**2)** Докажите, что $L^\infty(X,\mu)$ несепарабельно за исключением случая, когда оно конечномерно (последнее равносильно тому, что $X$ нельзя разбить на бесконечное число измеримых подмножеств положительной меры).

**ДЗ 7.1.** Докажите, что $L^\infty(X,\mu)$ полно.

Итак, для произвольного пространства с мерой $(X,\mu)$ мы определили семейство банаховых пространств $L^p(X,\mu)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Отметим, что если $\mu(X) < \infty$, то пространства $L^p(X,\mu)$ убывают с ростом $p$ (см. ДЗ3.3). В частности, $L^1(X,\mu)$ — самое большое из них, а $L^\infty(X,\mu)$ — самое маленькое. Ситуация меняется на противоположную, если $X = \mathbb{N}$, а $\mu$ — считающая мера: в этом случае $L^p(X,\mu) = \ell^p$, и пространства $\ell^p$ растут с ростом $p$ (см. упражнение 2.3). В частности, $\ell^\infty$ — самое большое из них, а $\ell^1$ — самое маленькое. В общем же случае никаких включений между $L^p$-пространствами может и не быть:

**ДЗ 7.2.** Покажите, что если $p \neq q$, то $L^p(\mathbb{R}) \not\subseteq L^q(\mathbb{R})$.