1. Прикладные методы анализа. Листок 4. Обобщенные функции

Обязательные задачи: 1, 2а–2г, 3, 7, 9б, 11а, 12а. Срок сдачи - 15 ноября.

1. Пусть $f \in \mathscr{D}'$ и $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ – мультипликатор. Покажите, что $(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'$.

2. Найдите Фурье-образы обобщенных функций

$$\text{а) } \delta(x); \qquad \text{б) } (x \pm i0)^{-1}; \qquad \text{в) } \frac{1}{x}; \qquad \text{г) } e^{-a^2x^2} \ (a^2 > 0); \qquad \text{д) } \frac{\sin ax}{x}.$$

3. Найдите фундаментальное решение уравнения теплопроводности: $(\partial_t - \partial_x^2)E(t,x) = \delta(t)\delta(x)$, равное нулю при $t < 0$. *Указание*: примените преобразование Фурье по x. Выпишите функцию Грина $G(t,x;t',x')$ задачи Коши. Вычислите $u(t,x)$ при $t = T$, если $u(t,x) = 0$ при $t < 0$ и $u(0,x) = e^{-ax^2}$.

4. Найдите фундаментальное решение уравнения $(\partial_x + \partial_y)E(x,y) = \delta(x)\delta(y)$; сравните его с фундаментальным решением из задачи 9а.

5. Покажите, что для любой $f \in \mathscr{D}(\mathbb{C})$

$$\left(\frac{1}{z^2}, f\right) = \int_{|z|>1} \frac{d^2z}{z^2} f(z) + \int_{|z|<1} \frac{d^2z}{z^2}(f(z) - f(0)).$$

6. Исходя из определения производных обобщенной функции, докажите, что

$$\partial_z \left(z^{-1}\right) = -z^{-2}.$$

7. Покажите, что функции $\ln|z|$ и $1/z$ локально интегрируемы по мере $dz_{\mathrm{Re}} dz_{\mathrm{Im}}$ и

$$\partial_z \ln|z| = \frac{1}{2z} \qquad \text{в смысле обощенных функций.}$$

8. Пусть $f(z)$ – функция комплексного переменного, непрерывно-дифференциируемая в замыкании ограниченной области D. Докажите формулу Коши-Грина:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} dz' \frac{f(z')}{z'-z} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{D} \frac{d^2 z'}{z'-z}\, \partial_{\bar{z}'} f(z') = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin D \end{cases}$$

Для комплексного переменного δ-функция определяется как $\delta(z) = \delta(z_{\mathrm{Re}})\delta(z_{\mathrm{Im}})$, так что для любой $f \in \mathscr{S}(\mathbb{C})$ имеем $(\delta, f) \equiv \iint dz_{\mathrm{Re}} dz_{\mathrm{Im}}\, \delta(z) f(z) = f(0)$.

9. Исходя из определения производных обобщенной функции, докажите, что

$$\text{а)}^* \quad \overline{\partial_z} \frac{1}{z} = \pi\delta(z); \qquad \text{б)} \quad \partial_z \overline{\partial_z} \ln|z| = \frac{\pi}{2}\delta(z).$$

10.* С помощью преобразования Фурье доказать, что

$$\frac{1}{x-y}\frac{1}{y} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x-y}\right) - \pi^2 \delta(x)\delta(y).$$

Все рациональные функции понимаются в смысле главного значения, произведение – прямое (внешнее) произведение обобщенных функций.

11. Найдите аналитические представления обобщенных функций на прямой:

$$\text{а) } \delta(x) \qquad \text{б) } (x \pm i0)^{-1}; \qquad \text{в) } 1/x.$$

12. Пусть $a(t)$ - непрерывная функция.
   а) Покажите, что задача Коши $u' + a(t)u = f(t)$, $u(0) = u_0$, где $u(t) \in C^1([0,+\infty))$ эквивалентна задаче нахождения обобщенной функции $u(t)$ с носителем на полупрямой $[0,+\infty)$, удовлетворяющей уравнению

$$u' + a(t)u = f(t)\eta(t) + u_0\delta(t);$$

   б)* Переформулируйте аналогичным образом задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

13. Покажите, что свертка $\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{x-y+i0}\frac{1}{y \pm i0}$ равна $\frac{-2\pi i}{x+i0}$ в 1-м случае и 0 во 2-м.