

ПУЧКИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ЛИСТОК 4: ЛОКАЛЬНО ПОСТОЯННЫЕ ПУЧКИ И ТОЧНОСТЬ ФУНКТОРОВ ПРЯМОГО-ОБРАТНОГО ОБРАЗА

Осень 2012 года

Пучок (множеств или абелевых групп) $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве X называется *локально постоянным* со слоем (множеством или абелевой группой) A , если у любой точки $x \in X$ найдется открытая окрестность $x \in U \subset X$, такая что ограничение пучка $\mathcal{F}$ на открытое подмножество U изоморфно (как пучок множеств или абелевых групп, соответственно) постоянному пучку $\underline{A}_U$.

Топологическое пространство X называется *локально связным* (*локально линейно связным*, *локально односвязным*), если оно допускает базу топологии, состоящую из связных (линейно связных, односвязных) (в индуцированной топологии) открытых подмножеств.

Задача 1. Покажите, что пучок множеств $\mathcal{F}$ на локально связном топологическом пространстве X является локально постоянным со слоем A тогда и только тогда, когда связанное с $\mathcal{F}$ “накрытие” (в смысле определения, дававшегося в этом курсе) $\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X$ является накрытием пространства X со слоем A в смысле определения, дававшегося в курсе топологии.

Задача 2. Пусть X — линейно связное, локально линейно связное, локально односвязное топологическое пространство и $x \in X$ — фиксированная точка. Постройте взаимно-однозначное соответствие (эквивалентность категорий) между

а) локально постоянными пучками множеств $\mathcal{F}$ на X со слоем $\mathcal{F}_x = A$ и гомоморфизмами из фундаментальной группы $\pi_1(X, x)$ пространства X в группу перестановок множества A ;

б) локально постоянными пучками абелевых групп на X со слоем $\mathcal{F}_x = A$ и гомоморфизмами из фундаментальной группы $\pi_1(X, x)$ пространства X в группу автоморфизмов абелевой группы A .

Задача 3. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $y = (0, 0) \in X$, $U = X \setminus \{y\}$, $x = (1, 0) \in U$, и $j: U \rightarrow X$ — отображение вложения.

а) Пусть $\mathcal{G}$ — локально постоянный пучок абелевых групп на U со слоем $\mathcal{F}_x = A$ и автоморфизмом монодромии $\phi: A \rightarrow A$, связанным с действием элемента фундаментальной группы $\pi_1(U, x)$, представляющим собой обход один раз против часовой стрелки вокруг точки y . Вычислите слой пучка $j_*\mathcal{G}$ в точке $y \in X$.

б) Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X , ограничение которого на U является локально постоянным пучком. Обозначим через A и B слои пучка $\mathcal{F}$ в точках x и y . Какие отображения надо задать между группами A и B , и какие условия наложить на эти отображения, чтобы по ним однозначно восстанавливался произвольный пучок $\mathcal{F}$ описанного вида?

в) Вычислите группы когомологий $H^*(X, \mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ в терминах абелевых групп A и B и отображений между ними, описанных в пункте б).

Начиная с этого момента, под “пучками” подразумеваются пучки абелевых групп.

Задача 4. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств.

а) Покажите, что если $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ — точная последовательность пучков на Y , то последовательность $0 \rightarrow f^*\mathcal{F} \rightarrow f^*\mathcal{G} \rightarrow f^*\mathcal{H} \rightarrow 0$ пучков на X точна.

б) Покажите, что если $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ — точная последовательность пучков на X , то последовательность $0 \rightarrow f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{H} \rightarrow 0$ пучков на Y точна.

в) Приведите контрпример, показывающий, что последовательность из пункта б) (продолженная нулевым пучком) может не быть точной в правом члене.

Задача 5. Пусть X — топологическое пространство, $U \subset X$ — его открытое подмножество, снабженное индуцированной топологией, и $j: U \rightarrow X$ — отображение вложения. Пусть $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ — точная последовательность пучков на U .

а) Покажите, что последовательность $0 \rightarrow j_!\mathcal{F} \rightarrow j_!\mathcal{G} \rightarrow j_!\mathcal{H} \rightarrow 0$ пучков на X точна.

б) Покажите, что последовательность $0 \rightarrow j_*\mathcal{F} \rightarrow j_*\mathcal{G} \rightarrow j_*\mathcal{H} \rightarrow 0$ пучков на X точна.

в) Приведите контрпример, показывающий, что последовательность из пункта б) (продолженная нулевым пучком) может не быть точной в правом члене.

Задача 6. Пусть X — топологическое пространство, $Z \subset X$ — его замкнутое подмножество, снабженное индуцированной топологией, и $i: Z \rightarrow X$ — отображение вложения.

а) Покажите, что если $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ — точная последовательность пучков на Z , то последовательность $0 \rightarrow i_*\mathcal{F} \rightarrow i_*\mathcal{G} \rightarrow i_*\mathcal{H} \rightarrow 0$ пучков на X точна.

б) Покажите, что если $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ — точная последовательность пучков на X , то последовательность $0 \rightarrow i^!\mathcal{F} \rightarrow i^!\mathcal{G} \rightarrow i^!\mathcal{H} \rightarrow 0$ пучков на Z точна.

в) Приведите контрпример, показывающий, что последовательность из пункта б) (продолженная нулевым пучком) может не быть точной в правом члене.