Теория представлений: начало

Правила игры. Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить 80% задач без звёздочек.

◇ **4.1.** Опишите все неприводимые конечномерные представления циклической группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **а)** над $\mathbb{C}$; **б)** над $\mathbb{R}$.

◇ **4.2. а)** Найдите два одномерных представления группы S_n и докажите, что других одномерных представлений у S_n нет.

б) Рассмотрим перестановочное представление S_n в n-мерном пространстве, связанное с действием S_n на множестве $\{1, \dots, n\}$. Укажите в нём тривиальное одномерное подпредставление. Найдите дополнительное к нему представление и докажите, что оно неприводимо. Это представление называется *стандартным*, или *тавтологическим*.

◇ **4.3.** Покажите, что конечная группа G имеет ровно $|G/G'|$ одномерных представлений (основное поле считаем алгебраически замкнутым).

◇ **4.4.** Пусть $A_1, A_2, \dots$ — семейство (возможно, бесконечное) коммутирующих линейных операторов на конечномерном комплексном векторном пространстве V.

а) Покажите, что у всех операторов A_i есть общий собственный вектор в V.

б) Покажите, что в некотором базисе пространства V все операторы A_i записываются при помощи верхнетреугольных матриц.

в) Не используя лемму Шура, докажите, что все неприводимые представления конечной абелевой группы над $\mathbb{C}$ одномерны.

◇ **4.5.** Приведите пример представления конечной группы G над полем конечной характеристики, которое не является вполне приводимым.

◇ **4.6*.** Пусть V — неприводимое представление конечной группы G. Покажите, что G-инвариантное эрмитово скалярное произведение на V единственно с точностью до пропорциональности.

Представления группы S_3

◇ **4.7.** Пусть $\sigma = (12), \tau = (123) \in S_3$, W — некоторое представление группы S_3.

а) Докажите, что если $v \in W$ — собственный вектор для τ, отвечающий собственному значению ω, то вектор $\sigma(v)$ также является собственным вектором для τ с собственным значением ω^2. Какие значения может принимать ω?

б) Докажите, что в условиях предыдущего пункта подпространство $\langle v, \sigma(v)\rangle$ является подпредставлением группы S_3 (таким образом, размерность всякого неприводимого представления S_3 не превышает двух).

в) Опишите все неприводимые представления группы S_3 с точностью до изоморфизма.

◇ **4.8. а)** Разложите на неприводимые регулярное представление R группы S_3.

б) Пусть V — двумерное неприводимое представление группы S_3. Покажите, что $\mathrm{Sym}^{k+6} V \cong \mathrm{Sym}^k V \oplus R$.

в) Разложите на неприводимые $\mathrm{Sym}^k V$ для всех k.

◇ **4.9.** Напомним, что *группа диэдра* D_n задана образующими r и s, удовлетворяющими соотношениям $s^2 = r^n = e$, $sr = r^{-1}s$.

а) Аналогично задаче ◇ 4.7 покажите, что размерность неприводимого представления D_n не превосходит 2;

б*) Классифицируйте все эти представления с точностью до изоморфизма (возможно, придётся рассмотреть отдельно случаи чётного и нечётного n).