Механика и теория поля. Листок 5

1. Группа Лоренца содержит линейные однородные преобразования пространства Минковского, матрицы $\Lambda = \|\Lambda^\mu_\nu\|$ которых удовлетворяют условию:

$$\Lambda^{\mathsf{T}} g \Lambda = g, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь этим определением, докажите:

а) Для любого преобразования Лоренца либо $\Lambda^0_0 \geq 1$, либо $\Lambda^0_0 \leq -1$. Преобразования с $\Lambda^0_0 \geq 1$ называются ортохронными и их множество обозначется $L^{\uparrow}$.

б) Множество преобразований Лоренца с $\det \Lambda = 1$ и $\Lambda^0_0 \geq 1$ образует подгруппу. Эта подгруппа называется ограниченной группой Лоренца и обозначается $L^{\uparrow}_{+}$.

2. Преобразования из ограниченной группы Лоренца можно параметризовать следующим образом:

$$\Lambda(\varepsilon) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}\right), \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}, \quad \Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha},$$

где 6 независимых компонент вещественной антисимметричной матрицы $\|\varepsilon_{\alpha\beta}\|$ являются параметрами преобразования Лоренца, а 6 матриц $\Omega_{\alpha\beta}$ $(\alpha < \beta)$ размера 4×4 являются генераторами соответствующей алгебры Ли.

а) Докажите, что явная матричная форма генераторов может быть выбрана в виде

$$(\Omega_{\alpha\beta})^\mu_\nu = \delta^\mu_\alpha g_{\beta\nu} - \delta^\mu_\beta g_{\alpha\nu}.$$

б) Пользуясь явным видом матриц $\Omega_{\alpha\beta}$ найдите структуру алгебры Ли группы Лоренца, то есть, вычислите коммутатор

$$[\Omega_{\alpha\beta}, \Omega_{\gamma\sigma}].$$

в) Выясните физический смысл параметров $\varepsilon_{\alpha\beta}$, то есть, свяжите их с параметрами бустов и пространственных вращений.

3. Рассмотрим взаимно однозначное соответствие линейного пространства Минковского M_4 и линейного пространства эрмитовых 2×2 матриц:

$$M_4 \ni (x^0, x^1, x^2, x^3) \;\mapsto\; \hat{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad \det \hat{x} = x^\mu x_\mu.$$

Определим действие группы $SL(2,\mathbb{C})$ на пространстве эрмитовых матриц формулой

$$\hat{x} \mapsto \hat{x}' = L\,\hat{x}\,L^\dagger,$$

где комплексная 2×2 матрица $L \in SL(2,\mathbb{C})$ параметризуется 6 вещественными параметрами $\{a^k\}_{1\leq k\leq 3}$ и $\{b^k\}_{1\leq k\leq 3}$:

$$L = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} \sigma_k (a^k - ib^k)\right).$$

Матрицы Паули σ_k имеют вид:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

а) Докажите, что так определенное действие группы $SL(2,\mathbb{C})$ индуцирует преобразование Лоренца в пространстве Минковского:

$$\hat{x} \mapsto \hat{x}' = L(a,b)\,\hat{x}\,L^\dagger(a,b) \quad \Rightarrow \quad x'^\mu = \Lambda(\varepsilon)^\mu_\nu\, x^\nu.$$

б) Найдите связь параметров $\{a^i, b^j\}$ матрицы из группы $SL(2,\mathbb{C})$ и параметров $\varepsilon_{\alpha\beta}$ соответствующего преобразования Лоренца.

в) Приведет ли к преобразованию Лоренца действие группы $SL(2,\mathbb{C})$, заданное формулой

$$\hat{x} \mapsto \hat{x}' = L\,\hat{x}\,L?$$

4. Рассмотрим свободное вещественное скалярное поле с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\,\phi^2.$$

Разложим решение уравнения Эйлера-Лагранжа на положительно и отрицательно частотные компоненты

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \qquad \phi^\pm(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^4}\, a^\pm(\vec{p})\, \frac{e^{\pm ipx}}{2p^0}_{\big|_{p^0=\omega(\vec{p})}}, \quad \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Выразите 4-вектор энергии-импульса поля P^μ в терминах функций $a^\pm(\vec{p})$. Вектор P^μ является интегралом по трехмерному пространству от соответствующей плотности

$$P^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x T^{0\mu},$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля.

5. Рассмотрим систему 2 свободных комплексных скалярных полей $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2} \partial_\mu\phi_i^*\,\partial^\mu\phi_i.$$

Найдите все сохраняющиеся токи (в смысле теоремы Нетер) этой системы.

6*. В двумерном пространстве Минковского с координатами x^0 и x^1 и метрикой $g = \mathrm{diag}(1,-1)$ рассмотрим скалярное поле со следующей лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{\beta^2}\,(1 - \cos(\beta\,\phi)).$$

а) Найдите точное решение уравнени движения для поля ϕ в виде $\phi(x) = f(x^1 - vx^0)$ такое, что $\lim_{x^1\to+\infty}(f(x^1) - f(-x^1)) = 2\pi/\beta$.

б) Вычислите энергию и импульс найденного в пункте а) решения.