# Листок 6. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Измеримые функции

Анализ, 2 курс, **14.11.2012**

Всюду в этом листке через $\lambda_n$ (или просто $\lambda$) обозначается мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, через $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^n)$ — $\sigma$-алгебра всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$, через $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ — $\sigma$-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^n$.

**6⋄1$^{\text{O}}$** **а)** (*регулярность меры Лебега*). Докажите, что для любого измеримого множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : A \subseteq U,\ U \text{ открыто}\} = \sup\{\lambda(K) : K \subseteq A,\ K \text{ компактно}\}.$$

**б)** Докажите, что всякое измеримое по Лебегу множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ представимо в виде $A = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n) \cup N$, где $K_n$ — компакты и $N$ — множество меры 0. Как следствие, всякое измеримое по Лебегу множество отличается от некоторого борелевского на множество меры 0.

**6⋄2** (*единственность лебеговского продолжения*). Пусть $\mu$ — $\sigma$-аддитивная мера на некоторой $\sigma$-алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств $\mathbb{R}^n$, содержащей все параллелепипеды вида $I_1 \times \cdots \times I_n$ (где $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ — промежутки). Предположим, что для любого такого параллелепипеда $I$ справедливо равенство $\mu(I) = \lambda(I)$. Докажите, что $\mu(A) = \lambda(A)$ для любого измеримого по Лебегу $A \in \mathscr{A}$.

**6⋄3** **а$^{\text{O}}$)** Докажите, что мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ *инвариантна относительно сдвигов* (т.е. для любого измеримого по Лебегу множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и любого $v \in \mathbb{R}^n$ множество $A + v$ измеримо, и $\lambda(A + v) = \lambda(A)$).
**б)** Пусть $\mu$ — $\sigma$-аддитивная мера на некоторой $\sigma$-алгебре подмножеств $\mathbb{R}^n$, содержащей все параллелепипеды вида $I_1 \times \cdots \times I_n$ (где $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ — промежутки). Предположим, что $\mathscr{A}$ и $\mu$ инвариантны относительно сдвигов (т.е. для любого $A \in \mathscr{A}$ и любого $v \in \mathbb{R}^n$ выполнено $A + v \in \mathscr{A}$, и $\mu(A + v) = \mu(A)$). Предположим также, что $\mu(I) < \infty$ для любого ограниченного параллелепипеда $I$. Докажите, что существует такая константа $c \geqslant 0$, что $\mu(A) = c\lambda(A)$ для любого измеримого по Лебегу $A \in \mathscr{A}$.

**6⋄4** Докажите, что любое измеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}$, имеющее положительную меру, содержит неизмеримое подмножество.

Напомним (см. курс дифференциальных уравнений), что отображение $f\colon X \to Y$ между метрическими пространствами $X$ и $Y$ удовлетворяет *условию Липшица*, если существует такое $C > 0$, что $\rho(f(x), f(y)) \leqslant C\rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Всякое отображение, удовлетворяющее условию Липшица, непрерывно, и всякое отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ класса $C^1$ удовлетворяет условию Липшица локально (т.е. в некоторой окрестности каждой точки или, эквивалентно, на любом компакте).

**6⋄5** Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ — отображение, локально удовлетворяющее условию Липшица. Докажите, что
**а)** если $A \subseteq X$ измеримо и $\lambda(A) = 0$, то $f(A)$ измеримо и $\lambda(f(A)) = 0$;
**б)** если $A \subseteq X$ измеримо, то и $f(A)$ измеримо.

**6⋄6** **а)** Докажите, что для любого ортогонального преобразования $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и любого измеримого по Лебегу множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ множество $f(A)$ измеримо, и $\lambda(f(A)) = \lambda(A)$.
**б)** Докажите, что для любого линейного отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и любого измеримого по Лебегу множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ множество $f(A)$ измеримо, и $\lambda(f(A)) = |\det(f)| \cdot \lambda(A)$.
**в)** Докажите, что мера Лебега $n$-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, равна $|\det V(v_1, \ldots, v_n)| = \sqrt{\det G(v_1, \ldots, v_n)}$, где $V(v_1, \ldots, v_n)$ — матрица со столбцами $v_1, \ldots, v_n$, а $G(v_1, \ldots, v_n)$ — *матрица Грама* набора $v_1, \ldots, v_n$, составленная из скалярных произведений $(v_i, v_j)$.

**6⋄7** Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ — отображение, локально удовлетворяющее условию Липшица. Предположим, что $m > n$. Докажите, что $\lambda_m(f(X)) = 0$.

**6⋄8** Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое или замкнутое множество, $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — ее график. Докажите, что $\lambda_{n+1}(\Gamma_f) = 0$.

**6◇9** Определим функцию $c$ в концах отрезка $[0,1]$, полагая $c(0)=0$ и $c(1)=1$, а затем доопределим ее на «средней трети» $[1/3,2/3]$ этого отрезка формулой $c(x)=(c(0)+c(1))/2$. Затем проделаем ту же процедуру с отрезками $[0,1/3]$ и $[2/3,1]$; в итоге получим функцию на множестве $\{0\}\cup[1/9,2/9]\cup[1/3,2/3]\cup[7/9,8/9]\cup\{1\}$, принимающую на отрезках $[1/9,2/9]$ и $[7/9,8/9]$ значения $1/4$ и $3/4$ соответственно. Продолжая этот процесс, получим функцию $c\colon D\to[0,1]$, где $D\supset[0,1]\setminus C$, а $C$ — канторово множество.

**а)** Докажите, что построенная функция единственным образом продолжается до непрерывной функции $c\colon[0,1]\to[0,1]$. Эта функция называется *канторовой лестницей.*

**б)** Докажите, что $c$ не убывает на $[0,1]$, и $c'(x)=0$ п.в. на $[0,1]$.

**в)** Сохраняет ли силу п. (а) задачи 6.5 для произвольного непрерывного отображения $f$?

**г)** Сохраняет ли силу п. (б) задачи 6.5 для произвольного непрерывного отображения $f$?

**6◇10$^{\mathrm{O}}$** Пусть $X$ и $Y$ — множества, $\mathscr{A}\subseteq 2^X$ и $\mathscr{B}\subseteq 2^Y$ — $\sigma$-алгебры. Пусть $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{B}$ — такое семейство подмножеств, что порожденная им $\sigma$-алгебра содержит $\mathscr{B}$. Докажите, что для $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-измеримости отображения $f\colon X\to Y$ достаточно, чтобы $f^{-1}(C)\in\mathscr{A}$ для любого $C\in\mathscr{C}$. Выведите отсюда, что функция $f\colon X\to\mathbb{R}$ измерима в смысле определения, данного на лекции (т.е. $\{x\in X : f(x)<c\}\in\mathscr{A}$ для любого $c\in\mathbb{R}$) тогда и только тогда, когда она $(\mathscr{A},\mathscr{B}or(\mathbb{R}))$-измерима. В дальнейшем будем называть такие функции *$\mathscr{A}$-измеримыми* (или просто *измеримыми*, если ясно, о какой $\sigma$-алгебре $\mathscr{A}$ идет речь).

**6◇11** Пусть $X$ — множество, $\mathscr{A}\subseteq 2^X$ — $\sigma$-алгебра, $(f_n)$ — последовательность измеримых функций на $X$. Докажите измеримость следующих функций (при условии их существования):

**а$^{\mathrm{O}}$)** $\sup_n f_n$; **б)** $\inf_n f_n$; **в)** $\overline{\lim} f_n$; **г)** $\underline{\lim} f_n$. **д)** Докажите, что $\{x\in X : \exists \lim_n f_n(x)\in\mathbb{R}\}\in\mathscr{A}$.

**е)** Сохраняют ли силу пп. (а) и (б) для несчетных семейств?

Определение **1.** Пусть $X$ — множество. *Характеристической функцией* (или *индикатором*) множества $A\subseteq X$ называется функция $\chi_A\colon X\to\{0,1\}$, равная 1 на $A$ и 0 на $X\setminus A$. Если $\mathscr{A}\subseteq 2^X$ — алгебра множеств, то линейные комбинации функций вида $\chi_A$ $(A\in\mathscr{A})$ называются *$\mathscr{A}$-простыми.*

**6◇12$^{\mathrm{O}}$** Пусть $X$ — множество, $\mathscr{A}\subseteq 2^X$ — $\sigma$-алгебра.

**а)** Докажите, что ограниченная функция $f\colon X\to\mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-измерима тогда и только тогда, когда существует последовательность $(f_n)$ $\mathscr{A}$-простых функций, равномерно сходящаяся к $f$.

**б)** Докажите, что функция $f\colon X\to\mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-измерима тогда и только тогда, когда существует последовательность $(f_n)$ $\mathscr{A}$-простых функций, поточечно сходящаяся к $f$.

Определение **2.** Пусть $I\subseteq\mathbb{R}$ — промежуток. Функция $f\colon I\to\mathbb{R}$ называется *измеримой по Лебегу*, если она $(\mathfrak{M}(\mathbb{R}),\mathscr{B}or(\mathbb{R}))$-измерима, и *борелевской*, если она $(\mathscr{B}or(\mathbb{R}),\mathscr{B}or(\mathbb{R}))$-измерима.

**6◇13** Пусть $I\subseteq\mathbb{R}$ — промежуток.

**а)** Докажите, что каждая непрерывная функция $f\colon I\to\mathbb{R}$ — борелевская.

**б)** Пусть $X$ — множество, $\mathscr{A}\subseteq 2^X$ — $\sigma$-алгебра, $f\colon X\to\mathbb{R}$ — $\mathscr{A}$-измеримая функция, $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — борелевская функция. Докажите, что $g\circ f$ — $\mathscr{A}$-измеримая функция.

**в)** Докажите, что любая измеримая по Лебегу функция $f\colon I\to\mathbb{R}$ эквивалентна (т.е. равна почти всюду) борелевской.

**6◇14** **а)** Докажите, что существует гомеоморфизм одного отрезка на другой, переводящий некоторое измеримое по Лебегу множество в неизмеримое. (*Указание*: требуемый гомеоморфизм можно изготовить, «подправив» канторову лестницу.)

**б)** Докажите, что прообраз измеримого по Лебегу множества при непрерывном отображении $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ может не быть измеримым по Лебегу.

**в)** Верно ли, что композиция измеримых по Лебегу функций измерима по Лебегу? (Ср. с задачей 6.13 (б)).

**г)** Используя результат п. (б), придумайте еще одно доказательство существования измеримых по Лебегу неборелевских множеств на прямой (см., однако, задачу 6.1 (б)).

**д)** Докажите, что существуют измеримые по Лебегу неборелевские функции на $\mathbb{R}$ (см., однако, задачу 6.13 (в)).