Листок 7: Проективные модули. Примарное разложение.

Задачи по коммутативной алгебре - матфак ВШЭ

надо сдать до 30.11.2012 включительно

Напоминание: листки 1-4 учитываются для оценки за первый модуль, а остальные - за второй. Для того, чтобы баллы за листок зачлись, надо решить в нем пять задач (так что тем, кто сдал четыре, имеет смысл досдать пятую, если даже это происходит совсем не в срок!).

1 Пусть A (коммутативное) кольцо, M, N – A-модули. Каковы свойства точности функтора $Hom_A(M, *)$ из категории A-модулей в себя? Функтора $Hom_A(*, N)$?

2 Говорят, что A-модуль P проективен, если для сюръективного гомоморфизма $M \to N$ индуцированное отображение $Hom_A(P, M) \to Hom_A(P, N)$ тоже сюръективно. Докажите, что модуль проективен тогда и только тогда, когда он изоморфен прямому слагаемому свободного модуля.

3 Докажите, что проективный модуль плоский.

4 Докажите, что конечно порожденный проективный модуль над локальным кольцом свободен.

5 Пусть $A = \mathbf{C}[T]$. Какие из следующих A-алгебр плоские над A (т.е. являются плоскими A-модулями): $A[X]/(X^2 - T)$; $A[X]/(TX - 1)$; $A[X]/(TX - T)$?

Нарисуйте соответствующие отображения спектров.

6 Найдите два разных минимальных примарных разложения идеала (x^2, xy) в $\mathbf{C}[x, y]$.

7 Пусть M модуль над нетеровым кольцом A. Докажите, что элемент $m \in M$ нулевой, если его образ нулевой в M_P для всех $P \in Ass(M)$. Докажите, что гомоморфизм $f : M \to N$ инъективен тогда и только тогда, когда индуцированное отображение $f_P : M_P \to N_P$ инъективно для всех $P \in Ass(M)$ (замечание: по сравнению с критериями из листка 4 это некоторый прогресс, так как $Ass(M)$ – конечное множество).

8 Покажите, что $Ass(M) \subset Supp(M)$, и что минимальные элементы в $Ass(M)$ и $Supp(M)$ совпадают (см. определение носителя M в листке 4. Тем, кто не решал соответствующую задачу, настоятельно рекомендуется все же попробовать это сделать!)

9 Докажите, что нетерово кольцо факториально, если его неприводимые элементы просты, т.е. порождают простые идеалы. Пусть A – произвольное нетерово кольцо и $a = up_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$, где $a \in A$, u обратим, а p_i – попарно различные простые элементы. Покажите, что $(a) = \cap_{i=1}^{k} (p_i^{e_i})$ – минимальное примарное разложение.

10 Докажите, что нетерово кольцо факториально тогда и только тогда, когда для любого ненулевого элемента кольца все минимальные содержащие его простые идеалы являются главными.