Спецфункции 2012. Листок 1

1. Докажите,что $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma'(1) = -\gamma$, где $\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n$ – постоянная Эйлера-Маскерони.

2. Докажите, что функция $\Phi(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ -периодическая мероморфная функция с периодом 2, более того, антипериодическая с периодом 1 (т.е., $\Phi(z+1) = -\Phi(z)$), простыми полюсами в целых точках и единичными по модулю знака вычетами в них; соответственно, $\Phi^{-1}(z)$ - всюду определенная периодическая с периодом 2 функция с простыми нулями в целых точках.

3. а) Докажите, что функция $G(z) = 2^z\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z+1}{2})$ удовлетворяет функциональному уравнению $G(z+1) = zG(z)$

   б) Докажите, воспользовавшись любой из известных Вам конструкций $\Gamma(z)$, формулу удвоения
$$2^z\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}\Gamma(z).$$

4. а) Пользуясь выражением эйлеровского интеграла $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ через отношение Г-функций, $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$, вычислите $\Gamma(\frac{1}{2})$.

   б) Вычислите объем n-мерного шара.

5. Покажите, что первая и вторая логарифмические производные Г-функции представляются следующими рядами, абсолютно сходящимися при $z \neq 0, -1, ...$:
$$\frac{d\log\Gamma(z)}{dz} = -\gamma - \frac{1}{z} + z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(z+n)}, \qquad \frac{d^2\log\Gamma(z)}{dz^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

6. а) Докажите, что
$$\int_0^{\pi/2}\cos^{m-1}x\sin^{n-1}x\,dx = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{2\Gamma(\frac{m+n}{2})}, \qquad \mathrm{Re}\, m > 0,\ \mathrm{Re}\, n > 0,$$

   б) Вычислите интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$, где $m > 0$.

   в) Вычислите интеграл $\int_0^\infty \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}$, где $a, b, n > 0$.

   г) Вычислите $I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2}dx, \quad n \in \mathbb{R}, n \geq 0$ через значения Г-функции. Докажите, что $I(2n+1) = 0$ при и $I(2n) = \frac{(2n+1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ для целых положительных $n = 0, 1, 2....$

7. Используя тождество $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty t^{m-1}e^{-xt}dt$, найдите интеграл
$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^m}dx. \qquad (0 < m < 1)$$

8. а) Вычислите интеграл
$$\int_0^1 x_1^{\alpha_1-1}dx_1\int_0^{1-x_1}x_2^{\alpha_2-1}dx_2\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}}x_n^{\alpha_n-1}dx_n.$$

   б) Пусть $p_1, ..., p_n$ - положительные числа .Вычислите объем тела, заключенного между поверхностями $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$, $\sum_{i=1}^n (x_i/a_i)^{p_i} \leq 1$.

9.* Докажите, что интеграл Дирихле
$$\iint f(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)t_1^{\alpha_1-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}dt_1\cdots dt_n, \quad \mathrm{Re}\,\alpha_j > 0$$
взятый по симплексу $0 \leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq t_n \leq 1,\ t_1 + \cdots t_n \leq 1$, равен
$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}\int_0^1 f(\tau)\tau^{\alpha_1+\cdots\alpha_n-1}d\tau.$$