Представления и их характеры

Правила игры. Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить 80% задач без звёздочек.

◇ **5.1.** **а)** Докажите, что для произвольного представления V группы G имеется изоморфизм $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^3 V) \cong \mathrm{Sym}^3(\mathrm{Sym}^2 V)$. **б)** Верно ли, что $\mathrm{Sym}^m(\mathrm{Sym}^n V) \cong \mathrm{Sym}^n(\mathrm{Sym}^m V)$?

◇ **5.2.** Докажите, что для любого представления V конечной группы G

а) $\chi_{\mathrm{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2))$; **б)** $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$.

в*) Вычислите $\chi_{\mathrm{Sym}^k V}$ и $\chi_{\Lambda^k V}$.

◇ **5.3.** Вычислите характер стандартного представления (см. задачу 4.2 б)) группы S_3 и проверьте, что он ортогонален характерам обоих одномерных представлений.

◇ **5.4 (Группа S_4).** Как известно, в группе S_4 пять классов сопряжённости. Значит, у неё есть пять неприводимых представлений. В задачах 4.2 и 4.3 описаны три из них: два одномерных (*тривиальное* U и *знаковое* U') и трёхмерное *тавтологическое* представление V.

а) Вычислите их характеры.

Указание. Для вычисления χ_V воспользуйтесь тем, что $U \oplus V$ — перестановочное представление.

б) При помощи формулы Бернсайда найдите размерности оставшихся представлений.

в) При помощи гомоморфизма $S_4/V_4 \to S_3$ постройте двумерное неприводимое представление W группы S_4 и вычислите его характер.

г) Пользуясь соотношениями ортогональности, вычислите характер последнего оставшегося неприводимого представления V'.

◇ **5.5.** Напомним, что группа вращений куба изоморфна S_4. Разложите на неприводимые перестановочные представления группы S_4, соответствующие действию группы на **а)** объемлющем трёхмерном пространстве; **б)** вершинах; **в)** рёбрах; **г)** гранях куба.

◇ **5.6.** Составьте «таблицу умножения» для представлений группы S_4: для любых двух неприводимых представлений разложите их тензорное произведение в сумму неприводимых представлений.

◇ **5.7.** Разложите на неприводимые все внешние степени неприводимых представлений S_4.

◇ **5.8.** **а)** Опишите все неприводимые представления знакопеременной группы A_4 и вычислите их характеры;

б) Составьте «таблицу умножения» для представлений группы A_4.

◇ **5.9.** Всякое неприводимое представление группы S_4 является также представлением A_4.

а) Какие из представлений S_4 остаются неприводимыми при ограничении на A_4, а какие раскладываются в прямую сумму неприводимых?

б) Какие пары неизоморфных представлений S_4 изоморфны как представления A_4?

в) Какие неприводимые представления группы A_4 возникают при ограничении с представлений S_4?

◇ **5.10.** **а)** Опишите классы сопряжённых элементов в группе Q_8.

б) Опишите все неприводимые представления Q_8 и вычислите их характеры.

Указание. В этой задаче может пригодиться вложение $\mathbb{H} \hookrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$.

◇ **5.11.** Докажите, что в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ нет подгруппы, изоморфной S_4.

◇ **5.12*.** Докажите, что всякая конечная подгруппа в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ является подгруппой одной из групп диэдра D_3, D_4 или D_6.

◇ **5.13*.** Пусть G — конечная неабелева простая группа. Докажите, что размерность любого неприводимого нетривиального комплексного представления G больше 2.