Алгебра. 1 курс. Листок 5.

Максимальный балл за этот листок выставляется при решении из него любых СЕМИ задач, с учетом действия знака & , который означает то же, что и в прошлом листке.

Каждая из задач 5.1, 5.2 и 5.3 сдается, и, соответственно, засчитывается, как ОДНА ЗАДАЧА при условии наличия у студента ПИСЬМЕННОГО решения студентом всех ее пунктов; при приеме задачи преподаватель может по своему усмотрению попросить объяснить один или несколько ее пунктов.

◇ **5.1. &** *Перечислите все вещественные* 2×2 *матрицы* A*, удовлетворяющие каждому из следующих условий. Верно ли, что в каждом случае первую строку матрицы* A *можно задавать произвольно?* *а)* A *нильпотентная;* *б)* A *идемпотентная;* *в)* $A^2=E$*;* *г)* $A^2=-E$.

◇ **5.2. &** *Вычислите* A^m $(m\in\mathbb{N})$ *и* A^{-1} *(если только обратная существует) для следующих матриц (если размер не указан, считать, что* $n\times n$*):*

а) $a_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{если}\quad j=i+1\\ 0 & \text{если}\quad j\neq i+1\end{cases}$; *б)* $a_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{если } j-i\equiv 1 \pmod n\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$; *в)* $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$.

◇ **5.3. &** *Вычислите* A^m $(m\in\mathbb{N})$ *и* A^{-1} *(если только обратная существует) для следующих матриц (если размер не указан, считать, что* $n\times n$*):*

а) $a_{i,j}=\begin{cases}x & \text{если } j=i\\ 1 & \text{если } j=i+1\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$ *б)* $a_{i,j}=\begin{cases}\frac{x^{j-i}}{(j-i)!} & \text{если } j\geq i\\ 0 & \text{если } j<i\end{cases}$; *в)* $\begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

◇ **5.4.** *Докажите, что квадрат матрицы ранга 1 пропорционален ей самой. (Разберите сначала случай* 2×2 *матрицы.)*

◇ **5.5. &** *Докажите, что любая* 2×2 *матрица* A *удовлетворяет соотношению вида* $A^2+\lambda A+\mu E=0$*. (*E *— единичная матрица, а* 0 *— нулевая.) Выразите* λ *и* μ *через коэффициенты матрицы* A.

◇ **5.6.** *Пусть* N *— нильпотентная матрица. Докажите, что матрица* $E+N$ *обратима.*

◇ **5.7.** *Докажите, что* $\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}BA$ *и* $\operatorname{tr}CAC^{-1}=\operatorname{tr}A$*, если матрица* C *обратима.*

◇ **5.8.** *Пусть* $\mathbb{K}$ *— некоторое поле. Докажите, что множество матриц вида* $\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbb{K}$ *является коммутативным кольцом с единицей. Докажите, что это кольцо нельзя представить в виде прямого произведения колец. Перечислите все его делители нуля и нильпотентные элементы. Докажите, что в случае* $\mathbb{K}=\mathbb{F}_p$ *это кольцо не изоморфно никакому кольцу* $\mathbb{Z}_n$.

◇ **5.9.** *Пусть* $\mathbb{K}$ *— некоторое поле,* A *—* 2×2 *матрица над* $\mathbb{K}$*. Докажите, что множество матриц вида* $xE+yA$, $x,y\in\mathbb{K}$ *является коммутативным кольцом с единицей. Докажите, что это кольцо изоморфно либо прямому произведению* $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$*, либо кольцу из предыдущей задачи, либо является полем. Покажите, что все три указанных варианта реализуются в каждом из случаев* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ *и* $\mathbb{K}=\mathbb{F}_2$.

◇ **5.10. &** *а)* W *— конечномерное линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* U *и* V *— линейные подпространства в* W*,* $e_1,\dots,e_k$ *— базис в* U*,* $g_1,\dots,g_l$ *— базис в* V*, причем* $\dim W=k+l$ *и* $U\cap V=\{0\}$*. Докажите, что* $e_1,\dots,e_k,g_1,\dots,g_l$ *образуют базис* W.
б) Верно ли, что если U*,* V *и* T *— три линейные подпространства конечномерного линейного пространства* W*, такие что* $U\cap V=U\cap T=V\cap T=\{0\}$ *и* $\dim U+\dim V+\dim T=\dim W$*, то объединение базисов пространств* U*,* V *и* T *является базисом* W*?*

◇ **5.11. &** U *и* V *— линейные подпространства конечномерного линейного пространства* W*. Дайте определения линейных подпространств* $U\cap V$ *и* $U+V$ *и докажите, что*
$\dim U+\dim V=\dim(U+V)+\dim(U\cap V)$.