Теоремы Банаха и Банаха–Штейнгауза

3.1. Пусть (f_n) — последовательность в $C[0,1]$. Докажите, что $\sup_n \int_0^1 |f_n(t)|\,dt < \infty$ тогда и только тогда, когда для любой равномерно стремящейся к нулю последовательности (g_n) в $C[0,1]$ выполнено $\lim_n \int_0^1 f_n(t) g_n(t)\,dt = 0$.

3.2. Пусть V — банахово пространство и $T\colon V \to C^1[0,1]$ — линейный оператор. Предположим, что для всех $t \in [0,1]$ линейный функционал F_t на V, заданный формулой $F_t(x) = (Tx)(t)$, ограничен. Докажите, что тогда и T ограничен.

3.3 (*необходимость полноты в теореме Банаха об обратном операторе*)**.** Приведите пример нормированных пространств V и W и биективного ограниченного линейного оператора $T\colon V \to W$, обратный к которому неограничен, причем **1)** V полно, а W неполно; **2*****)** V неполно, а W полно.

3.4 (*необходимость полноты в теореме Банаха–Штейнгауза*)**.** Приведите пример нормированного пространства V и последовательности функционалов (f_n) в V^*, ограниченной на каждом векторе, но не ограниченной по норме.

3.5. Пусть V_1, V_2, W — нормированные пространства.
1) Билинейный оператор $f\colon V_1 \times V_2 \to W$ называется *ограниченным*, если существует такое $C \geqslant 0$, что $\|f(x,y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in V_1,\ y \in V_2$. Докажите, что билинейный оператор $f\colon V_1 \times V_2 \to W$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.
2) Предположим, что V_1 либо V_2 полно. Докажите, что любой раздельно непрерывный (т.е. непрерывный по каждому аргументу) билинейный оператор $V_1 \times V_2 \to W$ непрерывен.
3) Верно ли утверждение из п. 2 без предположения о полноте?

Пусть V, W — нормированные пространства. Снабдим прямую сумму $V \oplus W$ нормой, полагая $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$. Полученное нормированное пространство обозначим через $V \oplus_1 W$.

Определение 3.1. Говорят, что нормированное пространство V *разлагается в топологическую прямую сумму* векторных подпространств $V_0, V_1 \subseteq V$, если отображение $V_0 \oplus_1 V_1 \to V,\ (x_0, x_1) \mapsto x_0 + x_1$, — топологический изоморфизм. В этом случае пишут $V = V_0 \oplus_{\mathrm{top}} V_1$. Векторное подпространство $V_0 \subseteq V$ называется *дополняемым* в V, если существует такое векторное подпространство $V_1 \subseteq V$, что $V = V_0 \oplus_{\mathrm{top}} V_1$.

3.6. Пусть V — нормированное пространство, $V_0, V_1 \subseteq V$ — подпространства, причем $V = V_0 \oplus V_1$.
1) Докажите, что $V = V_0 \oplus_{\mathrm{top}} V_1$ тогда и только тогда, когда проектор на V_0 с ядром V_1 ограничен.
2) Выведите отсюда, что любое дополняемое подпространство замкнуто.
3) Докажите, что если V полно и V_0, V_1 замкнуты, то $V = V_0 \oplus_{\mathrm{top}} V_1$.

3.7. Пусть V — нормированное пространство. Докажите, что замкнутое векторное подпространство $V_0 \subseteq V$ дополняемо тогда и только тогда, когда существует такой ограниченный линейный оператор $S\colon V/V_0 \to V$, что $QS = \mathbf{1}$ (где $Q\colon V \to V/V_0$ — факторотображение).

3.8. Пусть V — нормированное пространство. Докажите, что **1)** любое конечномерное подпространство и **2)** любое подпространство конечной коразмерности дополняемы в V.

3.9***. 1)** Докажите, что $\mathbb{N}$ можно представить в виде несчетного объединения $\mathbb{N} = \bigcup_{i \in I} A_i$ счетных множеств A_i так, что $A_i \cap A_j$ конечно при $i \neq j$. (Подсказка: вместо $\mathbb{N}$ удобнее брать $\mathbb{Q}$).
2) Докажите, что для каждого $f \in (\ell^\infty)^*$, обращающегося в нуль на c_0, множество тех $i \in I$, для которых $f(\chi_{A_i}) \neq 0$, не более чем счетно.
3) Докажите, что на ℓ^∞/c_0 не существует счетного множества непрерывных линейных функционалов, разделяющего точки.
4) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.

Линейные функционалы и двойственность–I

3.10. Пусть $V = \mathbb{R}^2_p$ — плоскость, снабженная нормой $\|\cdot\|_p$, и пусть $V_0 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset X$ — «ось абсцисс». Зададим функционал $f_0 \colon V_0 \to \mathbb{R}$ формулой $f_0(x,0) = x$. Ясно, что $\|f_0\| = 1$. Сколько существует линейных функционалов на V, продолжающих f_0 и имеющих норму 1? (Рассмотрите всевозможные $p \in [1, +\infty]$.)

3.11. Пусть V — нормированное пространство.
1) Докажите, что если V^* сепарабельно, то и V сепарабельно.
2) Верно ли обратное?
3) Покажите, что не существует топологического изоморфизма между $(\ell^\infty)^*$ и ℓ^1.

3.12. Рефлексивны ли пространства **1)** ℓ^1; **2)** $L^1(X,\mu)$; **3)** $C[a,b]$?

3.13*. Докажите, что c_0 не изоморфно сопряженному ни к какому нормированному пространству.

Пусть V — нормированное пространство. Напомним (см. лекцию), что *слабая топология* на V — это инвариантная относительно сдвигов топология, в которой базой окрестностей нуля служат конечные пересечения множеств вида $U_{f,\varepsilon} = \{x \in V : |f(x)| < \varepsilon\}$, где $f \in V^*$ и $\varepsilon > 0$. Двойственно, *слабая* топология* на V^* — это инвариантная относительно сдвигов топология, в которой базой окрестностей нуля служат конечные пересечения множеств вида $U_{x,\varepsilon} = \{f \in V^* : |f(x)| < \varepsilon\}$, где $x \in V$ и $\varepsilon > 0$.

3.14. Пусть V — нормированное пространство.
1) Докажите, что слабая топология на V не сильнее исходной.
2) Докажите, что слабая топология на V совпадает с исходной тогда и только тогда, когда V конечномерно.
3) Докажите, что слабая* топология на V^* не сильнее слабой, которая, в свою очередь, не сильнее топологии, порожденной стандартной нормой на V^*.
4) Докажите, что слабая* топология на V^* совпадает с топологией, порожденной стандартной нормой, тогда и только тогда, когда V конечномерно.

Терминологическое предостережение. По общепринятому соглашению, непрерывность относительно слабой топологии называют *слабой непрерывностью*, сходимость относительно слабой топологии — *слабой сходимостью*, замкнутость относительно слабой топологии — *слабой замкнутостью* и пр. Следует помнить, что слабая топология на нормированном пространстве, вообще говоря, слабее исходной, поэтому сходимость по норме влечет слабую (но не наоборот). С другой стороны, слабая замкнутость влечет замкнутость по норме (но не наоборот), несмотря на кажущееся противоречие со здравым смыслом. Аналогичная терминология применяется и к слабой* топологии на сопряженном пространстве.

3.15. Пусть V — нормированное пространство.
1) Докажите, что линейный функционал на V непрерывен тогда и только тогда, когда он слабо непрерывен (т.е. непрерывен относительно слабой топологии).
2) Докажите, что замыкание векторного подпространства $V_0 \subset V$ совпадает с его слабым замыканием (т.е. с замыканием относительно слабой топологии на V).
3) Докажите, что линейный функционал F на V^* непрерывен относительно слабой* топологии тогда и только тогда, когда он имеет вид $F(f) = f(x)$ для некоторого $x \in V$ (т.е. принадлежит образу канонического вложения $V \hookrightarrow V^{**}$).
4) Приведите пример банахова пространства V и замкнутого по норме векторного подпространства $W \subset V^*$, не замкнутого в слабой* топологии. Может ли такое V быть рефлексивным?

Указание к п. 3. Докажите сначала следующую алгебраическую лемму: если V — векторное пространство и $f, f_1, \ldots, f_n$ — линейные функционалы на V, то $f \in \operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_n\}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} f \supseteq \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i$.

3.16. Какому необходимому и достаточному условию должно удовлетворять нормированное пространство V, чтобы на V^* слабая и слабая* топологии совпадали?