

Механика и теория поля. Листок 6

1. В плоскости xOy может без трения двигаться материальная точка массы m и заряда $q > 0$. На материальную точку действует потенциальная сила с потенциальной энергией $U(x, y) = m\omega_0^2(x^2 + y^2)/2$ (двумерный гармонический осциллятор). Найдите решение уравнений движения осциллятора в случае, когда он помещен в постоянное и однородное магнитное поле, направленное вдоль оси Oz : $\vec{H} = (0, 0, H)$.

2. Введем дуальный тензор напряженности электромагнитного поля $\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}$. Напомним, что $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ — полностью антисимметрический тензор четвертого ранга с $\varepsilon^{0123} = 1$ и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

а) Выразите через компоненты векторов электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ Лоренцевские инварианты электромагнитного поля: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.

б) Выразите $\det F$ через $\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

в) Введем обозначения $(F^{n+1})^\mu_\nu = (F^n)^\mu_\alpha F^\alpha_\nu$ (для $n \geq 1$) и $\text{Tr} F^n = (F^n)^\alpha_\alpha$. Докажите, что $\text{Tr} F^{2n-1} = 0 \ \forall n \geq 1$. Обратите внимание, что F^μ_ν **не** антисимметричен относительно перестановки μ и ν (в отличие от $F^{\mu\nu}$).

3. Тензор напряженности электромагнитного поля под действием группы Лоренца преобразуется как тензор второго ранга:

$$F^{\mu\nu}(x) \mapsto F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}(x),$$

где Λ — матрица векторного представления группы Лоренца. Основываясь на этой формуле, получите преобразования компонент E^i и H^i *однородного* в пространстве и *постоянного* во времени электромагнитного поля при преобразовании буста со скоростью v вдоль первой оси (ось Ox).

4. В некоторой системе отсчета существуют однородные и постоянные электрическое и магнитное поля, вектора которых $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не параллельны друг другу. Докажите, что почти всегда существует инерциальная система отсчета, в которой эти поля будут параллельны и найдите скорость этой системы отсчета. Единственно ли решение задачи? В каком случае задача не имеет решения (уточните ограничение “почти всегда”)?

Указание. Рассмотрите Лоренцевский буст вдоль прямой, перпендикулярной плоскости, натянутой на вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Для поиска исключительного случая полезно воспользоваться Лоренцевскими инвариантами, найденными в задаче 2.