1. Прикладные методы анализа. Листок 5. Асимптотические разложения

Обязательные задачи: 1а,б 2а,3,5а, 5б или 6,7а или 8б, 8а, 9а. Срок сдачи - 29 ноября.

Пусть L – кривая на плоскости, заданная уравнением $f(x,y)=0$ (считаем, что $\operatorname{grad} f$ всюду отличен от нуля). Определим обобщенную функцию $\delta(f(x,y)) \in D'(\mathbb{R}^2)$ правилом

$$(\delta(f), \varphi(x,y)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \iint_{0<f(x,y)<\varepsilon} \varphi(x,y)dxdy.$$

Эквивалентно, $\delta(f) = \frac{d}{d\varepsilon}\chi_{\{f\le\varepsilon\}}\big|_{\varepsilon=0}$, где χ_M – характеристическая функция множества M.

1. а) Докажите, что $(\delta(f),\varphi) = \int_L \varphi\omega$ для любой пробной функции $\varphi(x,y)$, где ω – произвольная 1-форма в окрестности L такая, что $df\wedge\omega = dx\wedge dy$. Выразите ω через dx и(или) dy. Покажите, что ограничение $\omega|_L$ однозначно определено.
   б) Зависит ли $\delta(f)$ от функции f или только от кривой L? Выпишите $(\delta(x^2+y^2-R^2),\varphi)$ и $(\delta(4x^2+4y^2-4R^2),\varphi)$ в виде однократных интегралов.
   в) Покажите, что $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f-c)dc = 1$ в смысле обобщенных функций.

2. а) Пусть δ – положительное число. Покажите, что $\operatorname{ch} z \sim e^z/2$ при $z\to\infty$ в секторе $|\arg z| < \pi/2-\delta$, и что это не так в секторе $|\arg z|<\pi/2$.
   б) Покажите, что $e^{-\operatorname{sh} z} = o(1)$ при $z\to\infty$ в полуполосе $\operatorname{Re} z\ge 0$, $|\operatorname{Im} z| \le \pi/2-\delta$.

3. Покажите, что функции $z^n\log^m z$, $n\le N$, $0\le m\le M$ образуют асимптотическую последовательность при $z\to\infty$, $|\arg z|<\pi$. Предъявите соответствующее асимптотическое разложение для функции $\log^2(1+z)$. Сходится ли оно?

4. Пусть $f(z)$ – однозначная голоморфная в окрестности $z=\infty$ функция, допускающая в этой окрестности асимптотическое разложение $f(z)\sim\sum_{k=m}^{+\infty} a_k z^{-k}$, $z\to\infty$. Докажите, что для достаточно больших z ряд $\sum_{k=m}^{+\infty} a_k z^{-k}$ сходится к $f(z)$.

5. Найдите асимптотику n-го положительного корня уравнения

   а) $\pi x = \operatorname{tg} x$ б) $\sin x = e^{-x}$

Для каждого из уравнений предложите асимптотическую последовательность из элементарных функций аргумента n, для которой возможно реккурентное нахождение коэффициентов асимптотического разложения корня. Найдите 3 первых члена асимптотического разложения (можно решить упрощенный вариант уравнения 5а: $x=\operatorname{tg} x$).

6. Исследуйте асимптотику(при большом положительном t) корня уравнения $x^2 = t+\log x$.

7. Найдите асимптотику интегралов при больших положительных x. Сходятся ли соответствующие асимптотические разложения? Предложите какую-либо оценку остаточного члена.

   а) $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{int}}{t^a}dt,\ a>1, n\in\mathbb{N}$ б) $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$

8. Интегрируя по частям, найдите асимптотическое разложение при $z\to\infty$, $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2}-\delta$ интегралов

   а) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2+z^2}dt,$ б) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2+z^2}dt$

9. Сделав замену переменных в интеграле, покажите, что при $\operatorname{Re} z\to+\infty$

   а) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-z\operatorname{sh} t}dt \sim \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{((2k-1)!!)^2}{z^{2k+1}},$ б) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2(z+\log t)^{1/3}} \sim z^{-1/3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3k-2)}{(-3z)^k}$