Спецфункции 2012. Листок 4

Условия экзамена. Экзамен устный. Каждый получает предварительно на дом 3 теоретических вопроса и задачу и отвечает по ним и по дополнительным вопросам по всему курсу. Решившим за неделю до начала сессии по 2 задачи из каждого из 5 листков автоматически выставляется 10 за экзамен; решившим по 1 из каждого листка - 6.

1. Докажите тождество Эйлера:

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z).$$

2. Докажите, что

$$\begin{aligned} F(a,b;c;z) = &\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b;a+b+1-c;1-z)+ \\ &\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;1+c-a-b;1-z). \end{aligned}$$

3. Пусть $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} d > 0$, $|z| < 1$. Докажите, что

а) $$F_{3,2}(a,b,d;c,f;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)}\int_0^1 t^{d-1}(1-t)^{c-d-1}F_{2,1}(a,b;f;zt)dt,$$

б) $$F_{2,1}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)}\int_0^1 t^{d-1}(1-t)^{c-d-1}F_{2,1}(a,b;d;zt)dt$$

4. Пусть $y_1(z)$, $y_2(z)$ - решения гипергеометрического уравнения с параметрами a,b,c и асимптотиками $y_1(z) \sim 1$, $y_2 \sim z^{1-c}$ при $z \to 0$; $y_3(z)$ и $y_4(z)$ решения того же гипергеометрического уравнения с асимптотиками $y_3 \sim (-z)^{-a}$, $y_4 \sim (-z)^{-b}$ при $z \to \infty$. Найдите матрицу перехода от y_1, y_2 к y_3 и y_4.

5. а) Найдите линейное соотношение с функциональными соотношениями на смежные гипергеометрические функции $F(a,b,c;z)$, $F(a,b,c+1;z)$, $F(a,b,c-1;z)$.
   б) Найдите линейное соотношение с постоянными соотношениями на смежные гипергеометрические функции $F(a,b,c;z)$, $F(a-1,b+1,c;z)$, $F(a-1,b,c+1;z)$.

6. Найдите дифференциальное уравнение второго порядка. которому удовлетворяет полином Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos x$. Найдите особые точки этого уравнения. Выразите полином Чебышева через гипергеометрические полиномы.

7. Полиномы Лежандра $P_n(x)$ могут быть определены как система ортогональных полиномов на отрезке $[-1,1]$ с равномерной мерой:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \delta_{m,n}\frac{2}{2n+1}.$$

Выведите, исходя из этого определения, дифференциальное уравнение второго порядка на $P_n(x)$, убедитесь, что оно имеет только регулярные особые точки; выразите $P_n(x)$ через гипергеометрические полиномы и выпишите для них формулу Родрига.

8. Пусть $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} a > 0$ и C - двойная петля вокруг точек 0 и 1, не охватывающая точку z. Найдите коэффициент пропорциональности между интегралами

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{b-c-1}(1-tz)^{-a}dt \qquad \text{и} \qquad \int_C t^{b-1}(1-t)^{b-c-1}(1-tz)^{-a}dt.$$

Какому из решений y_i из задачи 4 пропорциональны эти интегралы?