ПУЧКИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ЛИСТОК 6: КОГОМОЛОГИИ ГОЛОМОРФНЫХ ПУЧКОВ НА ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Осень 2012 года

Комплекснозначная функция f в области $U \subset \mathbb{C}^n$ называется голоморфной, если она вещественно-гладкая (имеет непрерывные смешанные частные производные всех степеней по вещественным координатам) и связанная с ней 1-форма $\overline{\partial} f = \sum_{i=1}^n \partial f/\partial \overline{z}_i \, d\overline{z}_i$ зануляется (т.е., $\partial f/\partial \overline{z}_i = 0$ для всех i).

Задача 1. а) Докажите, что всякая голоморфная функция в поликольце $\{(z_1, \dots, z_n) : a_i < |z_i| < b_i\}$, $-\infty \leqslant a_1, \dots, a_n < \infty$, $0 < b_1, \dots, b_n \leqslant \infty$ разлагается в ряд Лорана $f(z) = \sum_{i_1,\dots,i_n \in \mathbb{Z}} a_{i_1,\dots,i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$, сходящийся в поликольце.

б) Опишите множество всех рядов Лорана, сходящихся в поликольце с параметрами $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$.

Задача 2. Докажите следующую слабую форму $\overline{\partial}$-леммы Пуанкаре: для любой $(0, q)$-формы ψ, вещественно-гладкой в окрестности замкнутого полидиска $\overline{B} = \{(z_1, \dots, z_n) : |z_i| \leqslant 1\}$ и удовлетворяющей уравнению $\overline{\partial}\psi = 0$, найдется $(0, q-1)$-форма ϕ, вещественно-гладкая в открытом полидиске $B = \{(z_1, \dots, z_n) : |z_i| < 1\}$ и удовлетворяющая уравнению $\overline{\partial}\phi = \psi$.

Указания: опирайтесь на доказательство слабой формы $\overline{\partial}$-леммы Пуанкаре для функций одной комплексной переменной, дававшееся на лекции и семинаре. Рассуждайте по индукции по k, предполагая, что форма ψ не содержит дифференциалов $d\overline{z}_i$ с $i > k$.

Задача 3. Докажите следующую сильную форму $\overline{\partial}$-леммы Пуанкаре: для любой (p, q)-формы ψ, $q \geqslant 1$, вещественно гладкой в поликольце $\{(z_1, \dots, z_n) : a_i < |z_i| < b_i\}$, $-\infty \leqslant a_1, \dots, a_n < \infty$, $0 < b_1, \dots, b_n \leqslant \infty$ и удовлетворяющей уравнению $\overline{\partial}\psi = 0$, найдется вещественно-гладкая $(p,\ q-1)$-форма ϕ в том же поликольце, удовлетворяющая уравнению $\overline{\partial}\phi = \psi$.

Указания: прежде всего, сведите вопрос к случаю $p = 0$. Далее, опираясь на результат задачи 2, пользуйтесь методом, изложенным на семинаре для случая функций одной комплексной переменной. Наконец, при случае воспользуйтесь возрастающей индукцией по q.

Пучком $\mathcal{O}(m)$ на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ называется пучок, сечения которого над открытым подмножеством $U \subset \mathbb{C}P^n$ суть голоморфные функции f от однородных координат $(z_0 : z_1 : \cdots : z_n)$, определенные в области значений $z_1, \ldots, z_n$, не равных нулю одновременно и соответствующих точкам $\mathbb{C}P^n$, принадлежащим U, а также удовлетворяющие уравнению однородности $f(tz_0, \ldots, tz_n) = t^m f(z_0, \ldots, z_n)$ для всех $t \in \mathbb{C}^*$.

Задача 4. Вычислите когомологии пучков $\mathcal{O}(m)$ на проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ для а) $n = 1$ и произвольного m; б) $n = 2$ и $m = 0$; в) $n = 2$ и $m \geqslant 0$; г) $n = 2$ и произвольного m; д) произвольных n и m.

Указание: покройте $\mathbb{C}P^n$ аффинными картами $\{z_i \neq 0\}$ и пользуйтесь теоремой Лере (о вычислении когомологий пучков по Чеху) вместе с результатом задачи 3.

Задача 5. а) Вложите пучок $\mathcal{O}(m)$ на $\mathbb{C}P^n$ в качестве подпучка в пучок $\mathcal{O}(m+1)$ и вычислите факторпучок. б) Выпишите соответствующую длинную точную последовательность когомологий.

Задача 6. а) Пусть T обозначает пучок сечений голоморфного касательного расслоения к $\mathbb{C}P^n$. Постройте точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

на $\mathbb{C}P^n$.

б) Вычислите когомологии $H^*(\mathbb{C}P^n, T)$.

в) Вычислите когомологии пучков $T(m) = T \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(m)$ на $\mathbb{C}P^n$.

г) Вычислите когомологии пучка бивекторных полей $\bigwedge^2_{\mathcal{O}} T$ на $\mathbb{C}P^n$.

Задача 7. Рассмотрите пучок сечений ограничения касательного расслоения к $\mathbb{C}P^n$ на прямую $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^n$. Представьте этот пучок на $\mathbb{C}P^1$ в виде прямой суммы пучков $\mathcal{O}(m)$.

Задача 8. Пусть Ω^p обозначает пучок голоморфных p-форм на $\mathbb{C}P^n$; $\Omega^p(m) = \Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(m)$. Вычислите когомологии

а) $H^*(\mathbb{C}P^1, \Omega^1)$; б) $H^*(\mathbb{C}P^2, \Omega^1)$; в) $H^*(\mathbb{C}P^n, \Omega^1)$; г) $H^*(\mathbb{C}P^n, \Omega^1(m))$;

д) $H^*(\mathbb{C}P^n, \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1)$; е) $H^*(\mathbb{C}P^2, \Omega^2)$; ж) $H^*(\mathbb{C}P^n, \Omega^2)$; з) $H^*(\mathbb{C}P^n, \Omega^p)$.