Листок 8: Размерность и еще раз тензорное произведение

Задачи по коммутативной алгебре - матфак ВШЭ

надо сдать до 14.12.2012 включительно

Итоговая контрольная будет 21 декабря вместо лекции и пройдет, по предварительным сведениям, в аудиториях 1001 и 311, как и в прошлый раз. Возможно, она начнется чуть раньше, чтобы было некоторое дополнительное время. Следите за рекламой!

1 (эта простая задача была бы более уместна в листке 5, а здесь служит леммой для следующей.) Пусть K алгебраически замкнутое поле и L – поле, содержащее K . Докажите, что если некоторая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в K (и с конечным числом неизвестных) имеет решение в L , то она имеет решение и в K.

2 Пусть K алгебраически замкнутое поле, A, B – целостные K-алгебры. Докажите, что в $A \otimes_K B$ тоже нет делителей нуля. Указание: достаточно показать, что их нет в $A \otimes_K Frac(B)$, для чего можно попробовать воспользоваться предыдущей задачей, выбрав K-базис в A и рассматривая $ab = 0$ как систему уравнений на координаты a, b.

3 Пусть K поле, A, B – целостные конечно порожденные K-алгебры. Докажите, что $dim(A \otimes_K B) = dim(A) + dim(B)$ (в частности, размерность произведения алгебраических множеств равна сумме размерностей; воспользуйтесь леммой Нетер и $dim(K[X_1, \dots X_n]) = n$).

4 Пусть $B = A[X_1, \dots X_n]$ кольцо многочленов над кольцом A и $Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_k$ цепочка строго вложенных простых идеалов в B, причем для любого i, $Q_i \cap A = P$. Покажите, что $k \leq n$.

5 Пусть $R = \mathbf{C}[xu, xv, yu, yv] \subset \mathbf{C}[x, y, u, v]$. Найдите размерность R и представьте R как целое расширение подкольца A, изоморфного кольцу многочленов (укажите алгебраически независимые элементы, порождающие A над $\mathbf{C}$).

6 Пусть $I_k \subset \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ - идеал, порожденный $x_i x_{i+1} \ldots x_{n+k}$, где индексы берутся $\bmod n$ (например, если $n = 4$, то $I_1 = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1)$). Найдите минимальные простые идеалы над I_k и размерность $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]/I_k$.

Следующие две задачи - это "теорема о спуске" для плоских расширений колец.

7 Пусть A область целостности и B плоская A-алгебра, $P \subset A$ простой идеал, а Q такой простой идеал в B, что его ограничение на A - это P. Покажите, что существует такой простой идеал Q', содержащийся в Q, что его ограничение на A нулевое (вопрос-указание: каким специальным свойством обладают элементы, содержащиеся в минимальных простых идеалах?)

8 Пусть S – некоторая R-алгебра, N – S-модуль, M – R-модуль. Покажите, что $N \otimes_R M \cong N \otimes_S (M \otimes_R S)$. Выведите отсюда, что свойство быть плоским модулем сохраняется при замене базы, затем выведите "теорему о спуске" из предыдущей задачи.

9 Кольцо называется абсолютно плоским, если все модули над ним плоские. Покажите, что в абсолютно плоском кольце все главные идеалы равны своим квадратам. Какова размерность абсолютно плоского кольца?

10 Обратно, пусть R – приведенное нульмерное кольцо. Покажите, что для любого простого идеала P, локализация R_P – поле. Заметив, что тензорное произведение коммутирует с локализацией, покажите, что модуль плоский, если плоские все его локализации по простым идеалам, и заключите, что R абсолютно плоское кольцо.