

$S_5$ ,  $A_5$  и икосаэдр

**Правила игры.** Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить шесть задач из семи.

В следующих двух задачах описываются все неприводимые представления группы  $S_5$ . У этой группы семь классов сопряжённости, значит, нужно найти семь неизоморфных неприводимых представлений.

- ◇ **6.1.** Вычислите характеры следующих представлений группы  $S_5$ : тривиального  $U$ , знакового  $U'$ , тавтологического  $V$ ,  $V \otimes U'$ , внешнего квадрата тавтологического  $\Lambda^2 V$ . Убедитесь, что все эти представления неприводимы.
- ◇ **6.2.** Покажите, что симметрический квадрат представления  $V$  является суммой трёх неприводимых представлений:  $U$ ,  $V$  и пятимерного неприводимого представления  $W$ , не встречавшегося в предыдущей задаче. Вычислите характер представления  $W$ , найдите ещё одно неприводимое представление  $W'$  группы  $S_5$  и тем самым закончите составление таблицы неприводимых характеров группы  $S_5$ .
- ◇ **6.3.** Каждое из представлений из предыдущей задачи можно рассматривать как представление группы  $A_5$ . Разложите на неприводимые ограничения на  $A_5$  представлений  $U$ ,  $U'$ ,  $V$ ,  $V'$ ,  $W$ ,  $W'$  и вычислите их характеры (как представлений  $A_5$ ).
- ◇ **6.4.** Покажите, что ограничение на  $A_5$  шестимерного неприводимого представления  $\Lambda^2 V$  группы  $S_5$  есть сумма двух трёхмерных неприводимых представлений  $Y$  и  $Z$  группы  $A_5$ , и вычислите характеры  $Y$  и  $Z$ .
- ◇ **6.5.** Выведите из предыдущей задачи, что вершины икосаэдра нельзя разместить в узлах никакой решётки  $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ .
- ◇ **6.6.** Разложите на неприводимые перестановочные представления, соответствующие действию группы  $A_5$  на вершинах, рёбрах и гранях икосаэдра.
- ◇ **6.7 (Правило ветвления).** Рассмотрим подгруппу  $S_4 \subset S_5$ , состоящую из перестановок, оставляющих на месте один элемент. Разложите на неприводимые ограничения на  $S_4$  всех неприводимых представлений группы  $S_5$ .