

Алгебра. 1 курс. Листок 6.

В этом листке V всегда обозначает n -мерное линейное пространство.

Максимальный балл за этот листок выставляется при решении из него любых СЕМИ задач за каждую учебную неделю (с учетом действия знака &). Каждая из задач, отмеченных знаком $\mathcal{U}$, сдается, и, соответственно, засчитывается, как ОДНА ЗАДАЧА при условии наличия у студента ПИСЬМЕННОВОГО решения всех ее пунктов; преподаватель может по своему усмотрению попросить объяснить один или несколько ее пунктов.

◇ 6.1. & Линейный оператор f имеет в некотором базисе матрицу $a_{i,j} = \delta_{i+1,j}$. Докажите, что f ни в каком базисе не записывается диагональной матрицей.

◇ 6.2. & $\mathcal{U}$ Напишите в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$ матрицы следующих линейных операторов: а) ортогонального проектирования на плоскость $x + y + z = 0$; б) ортогонального проектирования на прямую $x = y = z$; в) поворота на угол φ вокруг прямой $x = y, z = 0$.

◇ 6.3. Пусть $\mathcal{P}_n = \{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n, \quad a_i \in \mathbb{R}\}$ — пространство многочленов степени не выше n . Определим отображение $\Delta : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ так: $\Delta(P(t)) = P(t+1) - P(t)$. (Δ называется оператором первой разности.) Докажите, что это линейное отображение, найдите его ядро и образ, а также матрицу в базисе $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, t^n$. Найдите минимальный многочлен оператора Δ .

◇ 6.4. Пусть f, g — два линейных оператора на V . Докажите, что $\text{Ker}(f \circ g) \supset \text{Ker } g$, и $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im } f$ и приведите пример двух операторов, для которых оба включения строгие.

◇ 6.5. * Пусть f — линейный оператор на V . Докажите, что если $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$ или $\text{Im } f^k = \text{Im } f^{k+1}$, то $\forall n > k \text{ Ker } f^n = \text{Ker } f^k$ и $\text{Im } f^n = \text{Im } f^k$. Выведите из этого, что если f — нильпотентный оператор, то $f^{\dim V} = 0$

◇ 6.6. & Линейный оператор f удовлетворяет уравнению $f^2 = \text{Id}_V$. Докажите, что у f есть собственный базис. Какими могут быть характеристический и минимальный многочлены оператора f ? Как выглядит матрица оператора f в собственном базисе?

◇ 6.7. & Пусть f — линейный оператор на V , $\lambda \in \mathbb{K}$ фиксировано. Докажите, что множество $V_\lambda = \{v \in V, f(v) = \lambda v\}$ является линейным подпространством V , инвариантным относительно f .

◇ 6.8. & Пусть f — линейный оператор на V , $v_1, \dots, v_k \in V$ таковы, что $f(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, k$, причем $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ все различны. Докажите, что тогда $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы.

◇ 6.9. & Пусть A диагональная матрица, и все стоящие на диагонали числа различны. Докажите, что любая матрица, перестановочная с A , имеет вид $P(A)$, где $P(x)$ — некоторый многочлен.

◇ 6.10. & Линейный оператор f в n -мерном пространстве имеет n собственных векторов, причем все собственные значения различны. Докажите, что любое инвариантное подпространство оператора f порождено собственными векторами f .

◇ 6.11. & Линейные операторы f и g перестановочны. Докажите, что $\text{Ker } g$ и $\text{Im } g$ являются инвариантными подпространствами оператора f .

◇ 6.12. & Вычислите характеристический и минимальный многочлены матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

◇ 6.13. & Пусть λ — собственное значение линейного оператора f , $Q(t)$ — некоторый многочлен. Докажите, что $Q(\lambda)$ является собственным значением оператора $Q(f)$.

◇ **6.14. &U** Пусть U — подпространство V ; $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Рассмотрим смежные классы $\bar{v}_i = v_i + U \in V/U$.

а) Верно ли, что если векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ линейно независимы, то смежные классы $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ тоже линейно независимы?

б) Верно ли, что если смежные классы $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ линейно независимы, то векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ тоже линейно независимы?

в) Докажите, что $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

◇ **6.15. &U** Пусть f — линейный оператор на V , а U — инвариантное подпространство. Рассмотрим отображение $\bar{f} : V/U \rightarrow V/U$, заданное формулой $\bar{f}(v + U) = f(v) + U$. Поставьте между следующими парами утверждений один из знаков " $\Leftrightarrow$ ", " $\Rightarrow$ ", " $\Leftarrow$ " (и докажите, что получились верные теоремы). а) "оператор f ненулевой" и "оператор $\bar{f}$ ненулевой";

б) "оператор f обратим" и "оператор $\bar{f}$ обратим"; в) $\text{Ker } f \subset U$ и "оператор $\bar{f}$ обратим";

г) "оператор f нильпотентен" и "оператор $\bar{f}$ нильпотентен".

◇ **6.16. &** Какими могут быть характеристический и минимальный многочлены идемпотентного линейного оператора f на n -мерном линейном пространстве? Докажите, что у f есть собственный базис. Как выглядит матрица оператора f в собственном базисе?

◇ **6.17.** В этой задаче линейное пространство V не обязательно предполагается конечномерным.

а) Пусть f — идемпотентный линейный оператор на V . Докажите, что $V = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

б) Пусть $V = U \oplus W$. Докажите, что существует единственный идемпотентный оператор $f : V \rightarrow V$, такой что $U = \text{Im } f$, $W = \text{Ker } f$.

◇ **6.18.** Докажите, что каждое из указанных отображений $f : V \rightarrow V$ в себя является идемпотентным линейным оператором и укажите, какое разложение в прямую сумму ему соответствует.

а) $V = \text{gl}(n, \mathbb{K})$ (пространство квадратных $n \times n$ матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$), $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$;

б) $V = \mathbb{K}[t]$ (докажите, что это пространство бесконечномерно!), $f(P(x)) = \frac{1}{2}(P(t) + P(-t))$;

в) $V = \mathbb{R}[t]$, $f(P(t)) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}t + \frac{P''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}t^n$. (Число n фиксировано; $P^{(m)}(t)$ обозначает m -ую производную многочлена $P(t)$.)

◇ **6.19.** Пусть $A \in \text{gl}(n, \mathbb{K})$ — фиксированная диагональная матрица, причем все ее собственные значения различны. Найдите все собственные значения и собственные векторы оператора $f : \text{gl}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \text{gl}(n, \mathbb{K})$ для следующих случаев:

а) $f(X) = AX$; б) $f(X) = AX - XA$; в) $f(X) = A^{-1}XA$ (предполагается, что $\det A \neq 0$).

◇ **6.20.** Найдите все собственные значения и размерности собственных подпространств для операторов из предыдущей задачи в случае, когда A — произвольная матрица, имеющая n различных собственных значений.

◇ **6.21.** Рассмотрим оператор дифференцирования на (бесконечномерном) линейном пространстве всех определенных на $\mathbb{R}$ функций, которые можно продифференцировать любое число раз. Найдите в этом пространстве конечномерное инвариантное подпространство, при ограничении на которое оператор дифференцирования а) не будет иметь вещественных собственных значений;

б) будет иметь заданные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

◇ **6.22.** Докажите, что множество S всех последовательностей комплексных чисел (т.е. $S = \{(z_1, z_2, \dots, z_n, \dots), z_i \in \mathbb{C}\}$) является линейным пространством над $\mathbb{C}$. Приведите пример обратимого линейного оператора на S , не имеющего ни одного собственного вектора.

◇ **6.23.** Найдите собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей из задачи 5.2б а) над полем $\mathbb{C}$; б) над полем $\mathbb{F}_2$ при $n = 3$; в) над полем $\mathbb{F}_7$ при $n = 3$.

◇ **6.24.** Пусть f — линейный оператор над $\mathbb{R}$.

а) Может ли оператор f^2 иметь отрицательные собственные значения?

б) * Верно ли, что у оператора f одно из чисел 2 или -2 является собственным значением, если известно, что 4 является собственным значением оператора f^2 ?

◇ **6.25. *** Существует ли линейный оператор в $\mathbb{R}^4$, имеющий единственное инвариантное подпространство, отличное от $\mathbb{R}^4$ и 0? Какой может быть размерность этого подпространства?