Линейные функционалы и двойственность–II

4.1. Для следующих операторов $T\colon V \to V$ опишите их сопряженные $T'\colon V^* \to V^*$, а в тех случаях, когда V — гильбертово пространство, и гильбертово сопряженные $T^*\colon V \to V$.
1) диагональный оператор в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0 (см. задачу ДЗ.5.3);
2) оператор умножения на ограниченную измеримую функцию в $L^p(X,\mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$ (см. задачу ДЗ.5.5);
3) оператор T_r *правого сдвига* и оператор T_ℓ *левого сдвига* в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0, действующие по правилу $T_r(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$; $T_\ell(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.
4) оператор *двустороннего сдвига* в $\ell^p(\mathbb{Z})$ (где $1 \leqslant p < \infty$) или в $c_0(\mathbb{Z})$, действующий по правилу $(T_b(x))_i = x_{i-1}$ $(i \in \mathbb{Z})$;
5) оператор «взятия первообразной» в $L^p[0,1]$, где $1 \leqslant p < \infty$ (см. задачу 1.12);
6) интегральный оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(X,\mu)$ (см. задачу 1.14).

Пусть V — нормированное пространство. Напомним (см. лекцию), что *аннулятором* подмножества $M \subseteq V$ называется подпространство $M^\perp = \{f \in V^* : f(x) = 0\ \forall x \in M\} \subseteq V^*$, а *преданнулятором* подмножества $N \subseteq V^*$ называется подпространство ${}^\perp N = \{x \in V : f(x) = 0\ \forall f \in N\} \subseteq V$.

4.2. Пусть V — нормированное пространство и $V_0 \subseteq V$ — замкнутое векторное подпространство. Постройте изометрические изоморфизмы $(V/V_0)^* \cong V_0^\perp$ и $V_0^* \cong V^*/V_0^\perp$.

4.3. Пусть V, W — банаховы пространства, $T\colon V \to W$ — ограниченный линейный оператор, $T'\colon W^* \to V^*$ — его сопряженный оператор. Докажите следующие утверждения:
1) T сюръективен $\Longrightarrow$ T' топологически инъективен;
2) T коизометричен $\Longrightarrow$ T' изометричен;
3) T топологически инъективен $\iff$ T' сюръективен;
4) T изометричен $\iff$ T' коизометричен;
5) T — топологический изоморфизм $\iff$ T' — топологический изоморфизм;
6) T — изометрический изоморфизм $\iff$ T' — изометрический изоморфизм.

4.4. 1) Пусть V — нормированное пространство, $i_V\colon V \to V^{**}$ — каноническое вложение. Исследуйте взаимосвязь между операторами $i_{V^*}\colon V^* \to V^{***}$ и $i_V'\colon V^{***} \to V^*$.
2) Докажите, что если банахово пространство обладает *предсопряженным* (т.е. топологически изоморфно сопряженному к какому-то банахову пространству), то оно дополняемо в своем втором сопряженном.
3) Докажите, что банахово пространство V рефлексивно $\iff$ V^* рефлексивно.
4) Рефлексивны ли пространства ℓ^∞, $L^\infty(X,\mu)$?

Напомним, что *коядро* линейного оператора $T\colon V \to W$ определяется равенством $\operatorname{Coker} T = W/\operatorname{Im} T$.

4.5. Пусть V, W — банаховы пространства, $T\colon V \to W$ — ограниченный линейный оператор с замкнутым образом.
1) Докажите, что сопряженный оператор $T'\colon W^* \to V^*$ также имеет замкнутый образ.
2) Докажите, что $\operatorname{Im} T = {}^\perp(\operatorname{Ker} T')$ и $\operatorname{Im} T' = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.
3) Постройте изометрические изоморфизмы $\operatorname{Ker} T' \cong (\operatorname{Coker} T)^*$ и $\operatorname{Coker} T' \cong (\operatorname{Ker} T)^*$.

4.6. 1) Докажите, что если цепной комплекс C банаховых пространств точен, то точен и сопряженный комплекс C^*.
2) Пусть V, W — банаховы пространства, $T\colon V \to W$ — ограниченный линейный оператор. Предположим, что $\operatorname{Im} T' = (\operatorname{Ker} T)^\perp$. Докажите, что $\operatorname{Im} T$ замкнут (ср. с п. 2 задачи 4.5).
3) Докажите утверждение, обратное к утверждению п. 1.

4.7**. 1) Докажите, что импликации в пп. 1 и 2 задачи 4.3 можно обратить.
2) Пусть V, W — банаховы пространства, $T\colon V \to W$ — ограниченный линейный оператор. Докажите, что $\operatorname{Im} T$ замкнут тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} T'$ замкнут (это усиливает п. 2 задачи 4.6).