ПУЧКИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ЛИСТОК 7: КОГОМОЛОГИИ МЕРОМОРФНЫХ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПУЧКОВ

Осень 2012 года

Задача 1. Пусть $\mathcal{F}_\alpha$ — семейство пучков абелевых групп на топологическом пространстве X, занумерованных индексами $\alpha \in I$, где I — некоторое множество.

а) Покажите, что предпучок, сопоставляющий открытому подмножеству $U \subset X$ абелеву группу $\prod_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha(U)$ (бесконечное произведение групп $\mathcal{F}_\alpha(U)$) является пучком на X.

б) Приведите контрпример, показывающий, что предпучок, сопоставляющий открытому подмножеству $U \subset X$ абелеву группу $\bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha(U)$ (бесконечную прямую сумму групп $\mathcal{F}_\alpha(U)$) может не быть пучком на X.

Пучок $U \longmapsto \prod_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha(U)$ называется (бесконечным) *произведением* $\prod_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$ пучков $\mathcal{F}_\alpha$. Пучок, ассоциированный с предпучком $U \longmapsto \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha(U)$ называется (бесконечной) *прямой суммой* $\bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$ пучков $\mathcal{F}_\alpha$.

в) Покажите, что $\bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$ является подпучком в $\prod_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$.

г) Вычислите слой пучка $\bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$ в точке $x \in X$ в терминах слоев пучков $\mathcal{F}_\alpha$. Справедливо ли аналогичное описание слоя пучка $\prod_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$?

д) Убедитесь, что пучок произвольных (разрывных) сечений накрытия, связанного с предпучком $\mathcal{P}$ на X, использовавшийся в лекциях — является бесконечным произведением пучков-небоскребов по всем точкам $x \in X$.

Задача 2. Пусть X — одномерное комплексное многообразие (риманова поверхность). Обозначим через $\mathcal{M}$ пучок, сопоставляющий каждому открытому подмножеству $U \subset X$ абелеву группу (или комплексное векторное пространство) всех мероморфных функций на U (по сложению).

а) Вычислите факторпучок $\mathcal{M}/\mathcal{O}$, представив его в виде бесконечной прямой суммы пучков-небоскребов по всем точкам $x \in X$.

б) Покажите, что пучок $\mathcal{M}/\mathcal{O}$ мягкий.

в) Вычислите пространства когомологий $H^*(X, \mathcal{M})$ для $X = \mathbb{C},\ \mathbb{C}\setminus\{0\}$, диска $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},\ \mathbb{C}P^1$.

г) Выпишите длинную точную последовательность когомологий, связанную с короткой точной последовательностью пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{O} \longrightarrow 0$$

для пространств X из пункта в). Какую теорему из комплексного анализа вы таким образом доказали?

Задача 3. 1) Выпишите длинную точную последовательность, связанную с экспоненциальной последовательностью пучков

$$0 \longrightarrow 2\pi i\,\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow 1$$

на X и вычислите группы когомологий $H^*(X, \mathcal{O}^*)$ пучка обратимых голоморфных функций $\mathcal{O}^*$ (по умножению) для пространства $X =$

а) $\mathbb{C}$; б) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; в) $\mathbb{C}P^1$; г) $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$; д) $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$; е) $\mathbb{C}P^2$; ж) $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$.

Согласно лекционному курсу (теорема 12.2 из книжки), между элементами группы $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ и классами изоморфизма голоморфных линейных расслоений на комплексном многообразии X имеется взаимно-однозначное соответствие.

2) Опишите линейные расслоения на пространствах X из предыдущего списка, связанные со всеми элементами вычисленных групп $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

Задача 4. Пусть снова X — одномерное комплексное многообразие. Обозначим через $\mathcal{M}^*$ пучок, сопоставляющий каждому открытому подмножеству $U \subset X$ абелеву группу всех мероморфных функций на U, не зануляющихся тождественно ни на какой связной компоненте U (по умножению).

а) Вычислите факторпучок $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$, представив его в виде бесконечной прямой суммы пучков-небоскребов по всем точкам $x \in X$.

б) Покажите, что пучок $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ мягкий.

в) Предложите интерпретацию группы $H^1(X, \mathcal{M}^*)$ и отображения

$$\phi\colon H^1(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}^*)$$

в терминах, подобных интерпретации элементов группы $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ как классов изоморфизма голоморфных линейных расслоений. Какое свойство голоморфного линейного расслоения выражается условием, что соответствующий ему элемент группы когомологий лежит в ядре отображения ϕ?

г) Опишите в явном виде граничное отображение

$$\psi\colon H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*),$$

используя интерпретацию элементов группы $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ как классов изоморфизма голоморфных линейных расслоений на X.

д) Вычислите группы когомологий $H^*(X, \mathcal{M}^*)$ для $X = \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, диска $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{C}P^1$.

е) Выпишите длинную точную последовательность когомологий, связанную с короткой точной последовательностью пучков

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^* \longrightarrow \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \longrightarrow 1$$

для пространств X из пункта д). Какие теоремы из комплексного анализа вы таким образом доказали?