Мера и измеримые функции, вопросы к коллоквиуму, декабрь 2012

1. Алгебра множеств, σ-алгебра, борелевская σ-алгебра. Определения, свойства. Конечно аддитивные и σ-аддитивные меры. Определения, монотонность, субаддитивность.

2. Цепочки множеств, соотношения $A_n \in \mathbf{\Sigma},\ A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$ и $\mu(A_1) < \infty,\ A_n \in \mathbf{\Sigma},\ A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

Вытекающая из этих соотношений σ-субаддитивность.

3. Мера на кольце, порожденном прямоугольниками на плоскости. σ-субаддитивность и σ-аддитивность.

4. Внешняя мера, её σ-субаддитивность. Определение измеримости по Лебегу и меры Лебега.

5. Множество измеримых по Лебегу подмножеств — σ-алгебра, мера Лебега — σ-аддитивна.

1. Измеримые функции — определение, свойства. Измеримость множеств $\{x : f(x) \in I\}$, где I — любой промежуток. Элементарные операции над измеримыми функциями.

2. Измеримость $\inf\{f_k(x)\}$, $\sup\{f_k(x)\}$. Непрерывная функция — измерима. Функции, измеримые по Борелю. Измеримая по Борелю f функция от измеримой — измеримая функция. Пример измеримой не борелевской функции.

3. Теорема. f_n — измеримые, $f_n \to f$ поточечно $\Rightarrow f$ измерима. Классы эквивалентности ($f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$). Сходимость почти всюду $f_n(x) \overset{a.e.}{\to} f(x)$.

4. Теорема Егорова: если $f_n \overset{a.e.}{\to} f$, то на множестве чуть меньшей меры $f_n \rightrightarrows f$.

5. Сходимость по мере. Теорема $*$. $\mu(X) < \infty$, $f_n \overset{a.e.}{\to} f \Rightarrow f_n \overset{\mu}{\to} f$.

6. Теорема Рисса: из $\overset{\mu}{\to}$ следует существование подпоследовательности $\overset{a.e.}{\to}$.

7. Теорема Лузина. С доказательством, через теоремы Бореля и Фреше.

8. Эквивалентные определения измеримой функции: через равномерные пределы ступенчатых (простых) функций и через непрерывные по теореме Фреше.

9. Приближения измеримых функций непрерывными, теоремы Вейерштрасса (со ссылкой на недоказанную теорему Берштейна).

1. Привести примеры: меры и двух σ-аддитивных мер, не связанных с $\mathbb{R}^n$.

2. Каждое открытое множество — измеримо по Лебегу.

3. Привести пример неизмеримого множества на отрезке $[0, 1]$.

4. Построить канторово множество нулевой меры (Cantor Middle Third Set).

5. Построить канторово множество положительной меры.

6. Построить канторову лестницу, доказать её непрерывность.

7. Для любой измеримой $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ справедливо $\forall \varepsilon \exists g : [0, 1] \to \mathbb{R} : g$ ограниченная и $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.

8. Привести пример непрерывной строго монотонной функции g и измеримого множества T, таких, что $g^{-1}(T)$ — не измеримое множество.

9. Привести пример измеримого неборелевского множества на отрезке.

10. Контрпримеры к теореме $*$: к условию $\mu(X) < \infty$ и к обратному утверждению.