Гармонический анализ на сфере

Правила игры. Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить шесть задач из семи. Приём задач из листков 4–7 заканчивается одновременно с календарём майя: все сданные задачи должны быть внесены в кондуит до 23 часов 59 минут 21 декабря 2012 г.

Пусть $A = \mathbb{C}[x, y, z]$, $A_m \subset A$ — подпространство однородных форм степени m. Группа $\mathrm{SO}(3)$ действует на A (и на каждом из A_m) заменами координат. Выберем в A базис из одночленов $x^p y^q z^s$. Введём в A эрмитово скалярное произведение так, чтобы этот базис был ортогональным и $(x^p y^q z^s, x^p y^k z^s) = p!q!s!$.

◇ **7.1.** Докажите, что оператор умножения на x в пространстве A сопряжён относительно этого скалярного произведения оператору дифференцирования $\partial/\partial x$, а оператор умножения на $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ сопряжён оператору Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Функции из A, которые аннулируются оператором Δ, называются *гармоническими*. Обозначим пространство гармонических функций через H. Пусть $H_m = H \cap A_m$ — пространство однородных гармонических функций степени m.

◇ **7.2.** Убедитесь, что $A_m = H_m \oplus r^2 A_{m-2}$. Выведите отсюда, что

$$A_m = H_m \oplus r^2 H_{m-2} \oplus r^4 H_{m-4} \oplus \dots,$$

причём все слагаемые в правой части $\mathrm{SO}(3)$-инвариантны.

Для каждого вещественного числа t обозначим через $h(t) \in \mathrm{SO}(3)$ поворот на угол t вокруг оси z. Элементы $h(t)$ образуют подгруппу T, изоморфную $\mathrm{SO}(2)$.

◇ **7.3.** Сделаем замену координат: пусть $u = x + iy$, $\overline{u} = x - iy$. Покажите, что одночлены вида $u^p \overline{u}^q z^l$, где $p+q+l = m$, образуют базис в пространстве A_m и являются общими собственными функциями преобразований $h(t) \in T$. Найдите их собственные значения (как функции от t) и кратности этих собственных значений.

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — единичная сфера, $\mathbb{C}[S]$ — алгебра многочленов на ней. На алгебре $\mathbb{C}[S]$ также имеется естественное действие $\mathrm{SO}(3)$.

◇ **7.4.** Пусть $\rho\colon A \to \mathbb{C}[S]$ — *отображение ограничения.* Опишите $\operatorname{Ker}\rho$ и докажите, что $\operatorname{Ker}\rho \cap A_m = 0$.

◇ **7.5.** Покажите, что в каждом ненулевом конечномерном подпредставлении группы $\mathrm{SO}(3)$ в $\mathbb{C}[S]$ существует ненулевая функция, инвариантная относительно подгруппы $T \cong \mathrm{SO}(2)$.

◇ **7.6.** Докажите, что пространство $\mathbb{C}[S]$ разлагается в ортогональную прямую сумму минимальных $\mathrm{SO}(3)$-инвариантных пространств $U_m = \rho(H_m)$, где $\dim U_m = 2m + 1$. Убедитесь, что в U_m имеется ортогональный базис $(Y_{m,0}, Y_{m,\pm1}, \dots, Y_{m,\pm m})$ из собственных функций преобразований из T, для которых собственное значение оператора $h(t)$, отвечающее функции $Y_{m,k}$, равно e^{ikt}.

Функции $Y_{m,k}$ называются *сферическими функциями Лапласа.*

◇ **7.7.** Пусть ξ, η, ζ — ограничение на S координатных функций x, y, z. Покажите, что функция $Y_{m,0}$ есть многочлен $P_m(\zeta)$ степени m (т.е. она не зависит от ξ и η). Выберем нормировку на $P_m(\zeta)$ исходя из условия $P_m(1) = 1$. Вычислите $P_m(\zeta)$ при $0 \le m \le 3$.
Указание. Выведите из ортогональности функций $Y_{m,k}$, что

$$\int_{-1}^{1} \overline{P_m(\zeta)} P_l(\zeta) d\zeta = 0 \text{ при } m \neq l$$

Многочлены $P_m(\zeta)$ называются *многочленами Лежандра.*