Механика и теория поля. Листок 7

1. Рассмотрим векторный потенциал свободного электромагнитного поля $A^\mu(x)$ в кулоновской калибровке

$$A^0(x) = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{A} = 0.$$

Из уравнений Максвелла получите уравнение движения трехмерного вектора $\vec{A}(x)$ и выведите из него уравнения движения соответствующих наблюдаемых величин $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$ (напряженности электрического и магнитного полей). Рассмотрите решение уравнений движения в виде плоской волны

$$\vec{A}(x) = \operatorname{Re}\left(\vec{A}_0 \exp(-ik\cdot x)\right),$$

где $\vec{A}_0(x)$— постоянный трехмерный вектор (вообще говоря, с комплексными компонентами), а $k^\mu = (k^0, \vec{k})$ — постоянный 4-вектор.

а) Найдите выражения для электрического и магнитного полей, отвечающих такому вектор-потенциалу.

б) Найдите ограничения и взаимосвязи векторов $\vec{k}$, $\vec{A}_0$, $\vec{E}$ и $\vec{H}$, налагаемые калибровочным условием и уравнениями Максвелла. Докажите, в частности, что напряженности электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ортогональны друг другу и вектору $\vec{k}$.

в) Докажите, что в общем случае в любой фиксированной точке пространства вектор электрического (а также и магнитного) поля вращается с постоянной угловой скоростью в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{k}$, а его конец описывает эллипс (так называемая эллиптически поляризованная волна).

г) Вычислите вектор Пойнтинга и докажите, что энергия плоской волны распространяется в направлении вектора $\vec{k}$.

2. Пользуясь интегральной формой уравнений Максвелла для поля $\vec{E}$ и учитывая симметрию распределения зарядов, вычислите напряженность поля и потенциал, создаваемые в пространстве бесконечным круговым цилиндром радиуса R, заряженным равномерно по объему с объемной плотностью заряда ρ. Рассмотрите также предел бесконечно тонкой прямой нити, равномерно заряженной с линейной плотностью заряда λ (предел $R \to 0$ при условии $\rho R^2 \to \lambda/\pi \neq 0$).

3. Найдите напряженность магнитного поля, создаваемого в пространстве бесконечно тонким постоянным током, текущим вдоль оси Oz: $\vec{j} = (0, 0, I\delta(x)\delta(y))$.

4. Найдите пространственную плотность заряда, отвечающую сферически симметричному потенциалу следующего вида (потенциал Юкавы):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e^{-ar}}{r}, \quad r = |\vec{r}|,$$

где a — постоянный положительный параметр размерности обратной длины.

5*. а) Заряд q колеблется вдоль оси Oz вокруг начала координат по закону

$$z(t) = R\cos(\omega t).$$

Полагая $R\omega \ll c$ (c — скорость света), найдите поле этого заряда на расстояниях $r \gg c/\omega$ (волновая зона) в первом неисчезающем порядке по отношению v/c, где v — скорость заряда.

б) В предположениях предыдущего пункта найдите поле в волновой зоне для заряда, равномерно вращающегося в плоскости xOy вокруг начала координат по закону:

$$x(t) = R\cos(\omega t), \qquad y(t) = R\sin(\omega t).$$