Программа коллоквиума.

Обратите внимание, что многие вопросы дублируют друг друга. Некоторые теоремы разбиты на несколько перекрывающихся вопросов.

Необходимо знать определения: определителя матрицы, алгебраического дополнения к элементу матрицы, минора, произведения матриц, обратной матрицы, линейного пространства, подпространства линейного пространства, линейной зависимости (независимости) элементов линейного пространства, ранга системы элементов линейного пространства, ранга матрицы, верхнетреугольной матрицы, верхнеступенчатой матрицы, базиса линейного пространства, конечномерного линейного пространства, размерности линейного пространства, решения линейной системы, общего решения линейной системы, фундаментальной системы решений линейной системы, линейная оболочка подмножества линейного пространства, матрицы перехода от одного базиса линейного пространства к другому его базису, линейного отображения линейных пространств, матрицы линейного отображения, линейного оператора в линейном пространстве, ядра и образа линейного отображения, собственного вектора и собственного значения линейного оператора, характеристического и минимального многочлена линейного оператора, инвариантного подпространства линейного оператора, корневого подпространства.

1) Теорема об однозначности разложения на неприводимые множители в кольце многочленов от одной переменной над полем.

2) Перечисление неприводимых многочленов над полем действительных чисел.

3) Теорема: два многочлена не имеют общих множителей положительной степени тогда и только тогда, когда существуют такие многочлены $X(t), Y(t) \in \mathbb{K}[t]$, что $A(t)X(t) + B(t)Y(t) = 1$. ($\mathbb{K}$ — поле)

4) Определение определителя. Его основные свойства.

5) Теорема Крамера. Формулы Крамера.

6) Необходимое и достаточное условие существования у однородной системы n уравнений с n неизвестными ненулевых решений.

7) Необходимое и достаточное условие равенства определителя нулю.

8) Приведение матрицы элементарными преобразованиями над строками (столбцами) к верхнеступенчатому виду.

9) Метод Гаусса решения системы линейных уравнений. Свободные и связанные неизвестные.

10) Ранг системы строк матрицы равен рангу системы ее столбцов и равен максимальному размеру ненулевого минора.

11) Теорема Кронекера-Капелли.

12) Формулы для вычисления обратной матрицы.

13) Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований над строками матриц.

14) Представление обратимой матрицы в виде произведения матриц, отвечающих элементарным преобразованиям.

15) Мультипликативность определителя.

16) Сохранение ранга системы элементов линейного пространства при элементарных преобразованиях.

17) Теорема: в конечномерном линейном пространстве все базисы состоят из равного количества векторов. Определение размерности линейного пространства.

18) Определение размерности линейного пространства. Теорема: в n-мерном линейном пространстве любые $n+1$ вектор линейно зависимы.

19) Определение подпространства линейного пространства. Теорема: любое подпространство конечномерного линейного пространства конечномерно, причем размерность подпространства не превосходит размерности пространства; при совпадении размерностей подпространство совпадает с самим пространством.

20) Множество решений линейной системы — линейное пространство. Его размерность. Определение ФСР.

21) Теорема о структуре общего решения линейной системы.

22) Теорема о суперпозиции. (Если u_1 и u_2 являются, соответственно, решениями систем $Ax = b_1$ $Ax = b_2$, то $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ является, решением системы $Ax = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.)

23) Матрица перехода. Пересчет координат вектора при переходе к другому базису при помощи матрицы перехода.

24) Матрица перехода. Пересчет матрицы линейного оператора при переходе к другому базису при помощи матрицы перехода.

25) Линейное отображение. Матрица линейного отображения. Вычисление координат образа данного вектора по координатам этого вектора и матрице линейного отображения.

26) Линейные операции (сложение и умножение на число) над линейными отображениями. Композиция линейных отображений. Соответствующие операции над матрицами линейных отображений.

27) Определение инвариантного подпространства линейного оператора. Примеры. Вид матрицы линейного оператора в базисе, первые несколько векторов которого образуют базис инвариантного подпространства.

28) Ядро и образ линейного отображения. Доказательство того, что они являются подпространствами.

29) Ядро и образ линейного отображения. Теорема: если $f : V \to W$ — линейное отображение, то $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V$.

30) Ядро и образ линейного отображения. Интерпретация ядра и образа в терминах системы линейных уравнений.

31) Ранг линейного отображения. Теорема: линейный оператор обратим тогда и только тогда, когда его ранг равен размерности пространства.

32) Линейная оболочка системы векторов.

33) U и W — конечномерные подпространства линейного пространства V. Тогда $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$.

34) Определение прямой суммы двух подпространств. Теорема: если W конечномерно, то для того, чтобы $W = U \oplus V$, достаточно выполнения любых двух из следующих трех условий: $W = U + V$, $U \cap V = \{0\}$ и $\dim U + \dim V = \dim W$.

35) Характеристический многочлен оператора. Его независимость от выбора базиса.

36) Характеристический многочлен оператора. След и определитель — коэффициенты характеристического многочлена.

37) Теорема: пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $V = U \oplus W$, причем U и W инвариантны. Тогда матрица оператора f в подходящем базисе является блочно-диагональной, причем два диагональных блока — это матрицы ограничения оператора f на подпространства U и W.

38) Теорема: Любое собственное значение является корнем характеристического многочлена.

39) Теорема: Любой корень характеристического многочлена является собственным значением.

40) Теорема: Собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, линейно независимы.

41) Теорема: Если характеристический многочлен оператора разлагается на линейные множители, причем все корни имеют кратность 1, то существует базис, в котором матрица оператора диагональна.

42) Определение фактор-пространства. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис подпространства $U \subset V$. Тогда смежные классы $e_{k+1}+U, \ldots, e_n+U$ тогда и только тогда являются базисом фактор-пространства V/U, когда векторы $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ являются базисом пространства V.

43) Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $U \subset V$ — инвариантное подпространство. Определение фактор-оператора $\bar{f} : V/U \to V/U$, корректность определения. Блочно-верхнетреугольный вид матрицы оператора f в подходящем базисе; диагональные блоки — матрица ограничения оператора f на U и матрица фактор-оператора $\bar{f}$.

44) Определение фактор-пространства. Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение. Канонический изоморфизм $V/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$.

45) Построение инвариантного подпространства для оператора $f : V \to V$ в виде линейной оболочки $\langle v, f(v), f^2(v), \ldots\rangle$. Матрица ограничения оператора f на это подпространство (матрица Фробениуса). Ее характеристический многочлен.

46) Построение инвариантного подпространства для оператора $f : V \to V$ в виде линейной оболочки $\langle v, f(v), f^2(v), \ldots\rangle$. Матрица ограничения оператора f на это подпространство (матрица Фробениуса). Ее минимальный многочлен.

47) Теорема Гамильтона-Кэли.

48) Лемма: пусть $Q(t)$ — неприводимый сомножитель минимального многочлена оператора $f : V \to V$. Тогда $\operatorname{Ker} Q(f)$ — ненулевое инвариантное подпространство, не совпадающее с V. Минимальный многочлен ограничения f на это подпространство совпадает с $Q(t)$.

49) Лемма: пусть $Q(t)$ — неприводимый сомножитель минимального многочлена оператора $f : V \to V$. Тогда в V существует такое инвариантное подпространство, что минимальный многочлен ограничения f на это подпространство совпадает с характеристическим и совпадает с $Q(t)$.

50) Теорема: для любого линейного оператора в конечномерном пространстве существует базис, в котором матрица этого оператора является блочной верхнетреугольной, причем каждый диагональный блок является матрицей Фробениуса, минимальный и характеристический многочлен которой неприводим.

51) Теорема: любой неприводимый делитель характеристического многочлена является делителем минимального многочлена.

52) Идемпотентный оператор: его ядро, образ, собственные значения, собственные векторы, характеристический и минимальный многочлены.

53) Теорема о соответствии между идемпотентными операторами и разложениями пространства в прямую сумму.

54) Лемма: если операторы f и g перестановочны, то подпространства $\operatorname{Ker} g$ и $\operatorname{Im} g$ инвариантны относительно f.

55) Если $f : V \to V$ — нильпотентный оператор, то $f^{\dim V} = 0$.

56) Лемма: пусть $f : V \to V$ линейный оператор, и $\operatorname{Im} f^m = \operatorname{Im} f^{m+1}$. Тогда $V = \operatorname{Im} f^m \oplus \operatorname{Ker} f^m$.

57) Теорема о корневом разложении.

58) Теорема о жордановом разложении нильпотентного оператора.