Меры Хаусдорфа

Начнем с нескольких наводящих соображений. Напомним (см. лекцию), что *внешняя мера Лебега* подмножества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\lambda_n^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(P_i) : A \subseteq \bigcup_i P_i,\ P_i \in \mathscr{P}\Big\},$$

где $\mathscr{P}$ — класс всех стандартных параллелепипедов в $\mathbb{R}^n$ (т.е. параллелепипедов с ребрами, параллельными осям координат). Для того чтобы эта формула имела смысл, разумеется, необходимо, чтобы мера Лебега λ_n была уже определена на классе всех таких параллелепипедов (напомним, что мера стандартного параллелепипеда $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ равна по определению произведению длин одномерных промежутков $I_1, \ldots, I_n$). Нетрудно модифицировать определение внешней меры таким образом, чтобы оно не опиралось на понятие меры параллелепипеда. Для этого заметим вначале, что для любого $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\lambda_n^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(P_i) : A \subseteq \bigcup_i P_i,\ P_i \in \mathscr{Q}\Big\},$$

где $\mathscr{Q}$ — класс всех стандартных кубов в $\mathbb{R}^n$ (т.е. кубов с ребрами, параллельными осям координат). Это легко следует из того, что любой стандартный параллелепипед приближается стандартными параллелепипедами с рациональными вершинами, а последний разбивается на конечное число стандартных кубов (проведите аккуратное рассуждение). Преимущество кубов заключается в том, что объем куба легко выражается через его диаметр.

Определение 1. *Диаметром* метрического пространства (X, ρ) называется число

$$\operatorname{diam} X = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in X\} \in [0, +\infty].$$

По определению полагают $\operatorname{diam} \varnothing = 0$.

Заметим теперь, что если $P \subset \mathbb{R}^n$ — куб с длиной ребра ℓ, то $\operatorname{diam} P = \ell\sqrt{n}$, поэтому $\lambda_n(P) = \ell^n = (\operatorname{diam} P)^n / n^{n/2}$, и определение внешней меры приобретает вид

$$\lambda_n^*(A) = \frac{1}{n^{n/2}} \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} P_i)^n : A \subseteq \bigcup_i P_i,\ P_i \in \mathscr{Q}\Big\}. \tag{1}$$

Эта формула приводит к следующему определению.

Определение 2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $p \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$. Положим

$$\mathscr{H}^p_\varepsilon(X) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^p : X = \bigcup_i A_i,\ A_i \subseteq X,\ \operatorname{diam} A_i \leqslant \varepsilon\Big\};$$
$$\mathscr{H}^p(X) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathscr{H}^p_\varepsilon(X).$$

Величина $\mathscr{H}^p(X) \in [0, +\infty]$ называется *p-мерной внешней мерой Хаусдорфа* пространства X.

Замечание 1. Если $p = 0$ и A — одноточечное множество (так что $\operatorname{diam} A = 0$), то мы полагаем по определению $(\operatorname{diam} A)^p = 1$.

Замечание 2. На первый взгляд может показаться более естественным не накладывать ограничений на диаметры множеств A_i, покрывающих X (по аналогии с (1)), однако при таком подходе ничего даже отдаленно похожего на меру может не получиться (см. ниже упражнение 5).

В дальнейшем, говоря о внешней мере Хаусдорфа, слово «внешняя» мы будем опускать. Заметим, что если $\varepsilon < \varepsilon'$, то $\mathscr{H}^p_\varepsilon(X) \geqslant \mathscr{H}^p_{\varepsilon'}(X)$. Поэтому эквивалентно меру Хаусдорфа можно определить формулой

$$\mathscr{H}^p(X) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \mathscr{H}^p_\varepsilon(X).$$

Разумеется, величины $\mathscr{H}^p_\varepsilon$ и $\mathscr{H}^p$ определены и для любого подмножества $A \subseteq X$ (поскольку оно само является метрическим пространством в индуцированной метрике). В этой связи отметим, что

$$\mathscr{H}^p_\varepsilon(A) = \inf\Bigl\{\sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_i)^p : A \subseteq \bigcup_i A_i,\ A_i \subseteq X,\ \operatorname{diam} A_i \leqslant \varepsilon\Bigr\},$$

т.е. не обязательно требовать, чтобы все A_i содержались в A (объясните, почему).

Из определения очевидным образом следует, что мера Хаусдорфа — метрический инвариант (т.е. если между метрическими пространствами X и Y существует изометрическая биекция, то $\mathscr{H}^p(X) = \mathscr{H}^p(Y)$). Вот еще несколько несложных свойств мер Хаусдорфа.

Упражнение 1. Докажите, что
1) если $A \subseteq B$, то $\mathscr{H}^p(A) \leqslant \mathscr{H}^p(B)$;
2) $\mathscr{H}^p(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leqslant \sum_i \mathscr{H}^p(A_i)$;
3) если отображение $f\colon X \to Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $C \geqslant 0$ (т.е. $\rho(f(x), f(y)) \leqslant C\rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$), то $\mathscr{H}^p(f(X)) \leqslant C^p \mathscr{H}^p(X)$.

Для подмножеств $A, B \subseteq X$ положим $\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$.

Упражнение 2. Докажите, что
1) если A компактно, B замкнуто и $A \cap B = \varnothing$, то $\rho(A, B) > 0$;
2) если $\rho(A, B) > 0$, то $\mathscr{H}^p(A \cup B) = \mathscr{H}^p(A) + \mathscr{H}^p(B)$.

Упражнение 3. Что такое $\mathscr{H}^0(X)$?

Упражнение 4. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$. Докажите, что $\mathscr{H}^1(A) = \mathscr{H}^1_\varepsilon(A) = \lambda_1^*(A)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Результаты предыдущих упражнений, как и само название «мера Хаусдорфа», наводят на мысль, что $\mathscr{H}^p$ — действительно мера на некоторой σ-алгебре подмножеств X. Так оно и есть на самом деле:

Теорема 1. *Для любого метрического пространства (X, ρ) и для любого $p \geqslant 0$ внешняя мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^p$ является σ-аддитивной мерой на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}or(X)$.*

Доказывать эту теорему мы не будем. Фактически она является частным случаем одной теоремы Каратеодори, утверждающей, что любая неотрицательная функция на 2^X, удовлетворяющая условиям 1–2 упражнения 1 и условию 2 упражнения 2, является мерой на $\mathscr{B}or(X)$ (см. [6, 5, 1, 4]).

Следует иметь в виду, что равенство $\mathscr{H}^1 = \mathscr{H}^1_\varepsilon$ из упражнения 4 — это скорее исключение (отражающее специфику прямой), чем правило. Обычно вспомогательная функция $\mathscr{H}^p_\varepsilon$ существенно зависит от ε и весьма далека от того, чтобы быть мерой:

Упражнение 5. Пусть D — открытый круг на плоскости, имеющий достаточно малый диаметр (подберите сами). Вычислите $\mathscr{H}^1_1(D)$, $\mathscr{H}^1_1(\overline{D})$, $\mathscr{H}^1_1(\partial D)$.

Результат упражнения 4 и формула (1) наводят на мысль, что n-мерная мера Хаусдорфа в $\mathbb{R}^n$ должна быть как-то связана с мерой Лебега. Попробуем их сравнить:

Упражнение 6. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, что $\mathscr{H}^n \leqslant C_1\lambda_n^*$ и $\lambda_n^* \leqslant C_2\mathscr{H}^n$ на $2^{\mathbb{R}^n}$.

Если воспользоваться недоказанной теоремой 1, то полученный результат можно существенно усилить. Заметим, что мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^n$ на $2^{\mathbb{R}^n}$ инвариантна относительно сдвигов (т.к. сдвиг — изометрия), и что $\mathscr{H}^n(I) < \infty$ для любого ограниченного стандартного параллелепипеда $I \subset \mathbb{R}^n$ в силу упражнения 6. Применяя теорему 1 и результат задачи 6.3 (б) из листка 6, получаем, что меры $\mathscr{H}_n$ и λ_n на $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^n)$ отличаются умножением на константу. На самом деле эту константу можно вычислить явно:

Теорема 2. *На $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство $\mathscr{H}^n = (2^n/\alpha_n)\lambda_n$, где α_n — объем n-мерного шара радиуса 1.*

Теорема эта довольно трудная, и доказывать ее мы не будем. Доказательство можно найти в книгах [5, 2, 4].

Посмотрим теперь, как мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^p$ зависит от p.

Упражнение 7. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $0 < p < q < \infty$. Докажите, что
1) $\mathscr{H}^p(X) \geqslant \mathscr{H}^q(X)$;
2) если $\mathscr{H}^p(X) < \infty$, то $\mathscr{H}^q(X) = 0$.

Результат последнего упражнения можно по-другому сформулировать так:

Упражнение 8. Для каждого метрического пространства X существует такое $p_0 \in [0, +\infty]$, что $\mathscr{H}^p(X) = \infty$ при $p < p_0$ и $\mathscr{H}^p(X) = 0$ при $p > p_0$.

Определение 3. Число p_0, фигурирующее в упражнении 8, называется *хаусдорфовой размерностью* пространства X и обозначается $\dim_H X$.

Вот несколько простейших свойств хаусдорфовой размерности:

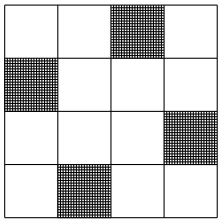
Упражнение 9. Докажите, что
1) если $A \subseteq B$, то $\dim_H A \leqslant \dim_H B$;
2) $\dim_H(\bigcup_{i=1}^\infty X_i) = \sup_i \dim_H X_i$;
3) если $f\colon X \to Y$ — липшицево отображение, то $\dim_H f(X) \leqslant \dim_H X$. В частности, если X и Y билипшицево изоморфны (т.е. между ними существут биекция, липшицева в обе стороны), то $\dim_H X = \dim_H Y$.

Посмотрим теперь, что можно сказать о хаусдорфовой размерности конкретных пространств.

Упражнение 10. Докажите, что для любого $A \subseteq \mathbb{R}^n$
1) $\dim_H A \leqslant n$;
2) если $\lambda_n^*(A) > 0$, то $\dim_H A = n$.

Упражнение 11. 1) Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — липшицева функция, Γ_f — ее график. Докажите, что $\dim_H \Gamma_f = 1$.
2) Докажите, что хаусдорфова размерность любой гладкой (или хотя бы кусочно гладкой) кривой в $\mathbb{R}^n$ равна 1.
3) Докажите, что хаусдорфова размерность любого гладкого k-мерного подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ равна k.

Упражнение 12. Пусть D_0 — замкнутый квадрат на плоскости со стороной 1. Разобьем его отрезками, параллельными сторонам, на 16 равных квадратов, и обозначим через D_1 множество, составленное из четырех квадратов, заштрихованнных на следующем рисунке:



Далее проделаем ту же процедуру с каждым из квадратов, составляющих множество D_1; в итоге получим множество D_2. Продолжая в том же духе, получим убывающую последовательность компактных множеств (D_n). Множество $D = \bigcap_n D_n$ называется *канторовой пылью.* Вычислите $\dim_H D$.

Упражнение 13. Вычислите хаусдорфову размерность канторова множества.

Указание. Пусть C — канторово множество, $p = \dim_H C$, $a = \mathscr{H}^p(C)$. Положим $C_1 = C \cap [0, 1/3]$, $C_2 = C \cap [2/3, 1]$, и заметим, что множества C_i $(i = 1, 2)$ подобны C с коэффициентом $1/3$. Применяя результаты упражнений 1 (3) и 2 (2), получаем

$$a = \mathscr{H}^p(C) = \mathscr{H}^p(C_1) + \mathscr{H}^p(C_2) = 2 \cdot (1/3)^p \cdot a.$$

Сокращая на a, находим $p = \log_3 2$.

В таком решении, конечно, есть дырка: сокращать на a можно лишь тогда, когда $a \neq 0$ и $a \neq \infty$. Однако указанный способ, использующий *самоподобие* канторова множества, позволяет по крайней мере угадать правильный ответ, а потом уже доказать, что он действительно правильный. Полагая $p = \log_3 2$, попробуйте доказать, что $0 < \mathscr{H}^p(C) < \infty$. Отсюда уже следует нужное равенство $\dim_H C = \log_3 2$.

Упражнение 14. Докажите, что для любого $p \in (0, 1)$ существует такой компакт $K \subset \mathbb{R}$, что $\dim_H K = p$, причем **1)** $0 < \mathscr{H}^p(K) < \infty$; **2)** $\mathscr{H}^p(K) = 0$; **3)** $\mathscr{H}^p(K) = \infty$.

Упражнение 15*. Пусть X — компактное метрическое пространство, разбитое на непересекающиеся компакты $X_1, \ldots, X_n$. Предположим, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ компакт X_i подобен X с коэффициентом $c_i < 1$. Докажите, что хаусдорфову размерность p пространства X можно найти из уравнения $\sum_i c_i^p = 1$.

Упражнение 16. Залезьте в интернет, сделайте поиск по слову «фрактал», полюбуйтесь на картинки и попробуйте вычислить хаусдорфову размерность треугольника Серпинского, губки Менгера, снежинки Коха и еще чего-нибудь.

Список литературы

[1] Богачев В. И. *Основы теории меры.* Москва–Ижевск: РХД, 2006.

[2] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Вербицкий М. С. *Теория меры.* `http://verbit.ru`.

[4] Макаров Б. М., Подкорытов А. Н. *Лекции по вещественному анализу*. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

[5] Федерер Г. *Геометрическая теория меры*. М.: Наука, 1987.

[6] Халмош П. *Теория меры*. М.: ИЛ, 1953.

[7] Falconer, K. J. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2003.

[8] Mattila, P. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*. Cambridge University Press, 1995.