Листок 7. Интеграл Лебега–I

Анализ, 2 курс, **12.12.2012**

В задачах этого листка под *пространством с мерой* понимается тройка $(X, \mathscr{A}, \mu)$, где X — множество, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств, $\mu\colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ — σ-аддитивная мера. Вместо $(X, \mathscr{A}, \mu)$ часто пишут просто (X, μ), не вводя явного обозначения для σ-алгебры $\mathscr{A}$ и называя множества из $\mathscr{A}$ *измеримыми.* Также будем предполагать, что пространство (X, μ) *σ-конечно* (т.е. является объединением не более чем счетного числа измеримых множеств конечной меры) и *полно* (т.е. любое подмножество множества меры 0 измеримо). В случае психологических затруднений всюду (кроме задач 1 и 4б) разрешается считать, что X — промежуток на прямой, а μ — мера Лебега λ.

7◇1 Пусть μ — «считающая» мера на $2^{\mathbb{N}}$ (мера множества равна числу его элементов). Придумайте простое необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Чему равен $\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu$?

7◇2 Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Докажите, что измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируема тогда и только тогда, когда $\sum\limits_n \mu\{x \in X : |f(x)| \geqslant n\} < \infty$.

7◇3 **а)** Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f\colon X \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция, причем $\int_A f\, d\mu = 0$ для любого измеримого $A \subseteq X$. Докажите, что $f = 0$ п.в.
б) Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — интегрируемая по Лебегу функция, причем $\int_{[a,x]} f\, d\lambda = 0$ для любого $x \in [a, b]$. Докажите, что $f = 0$ п.в.

7◇4 Пусть $c\colon [0, 1] \to [0, 1]$ — канторова лестница (см. задачу 6.9). Вычислите интегралы:
а) $\int_0^1 c(x)\, dx$; **б)** $\int_0^1 x\, d\mu_c(x)$, где μ_c — мера Стилтьеса на $[0, 1]$, соответствующая функции c (см. задачу 5.9).

7◇5 (*неравенство Чебышёва*). Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f\colon X \to [0, +\infty)$ — интегрируемая функция, $c > 0$. Докажите, что

$$\mu\{x \in X : f(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c} \int_X f\, d\mu.$$

7◇6 Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Говорят, что последовательность (f_n) интегрируемых функций на X сходится к интегрируемой функции f *в среднем*, если $\int_X |f - f_n|\, d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$.
а) Докажите, что если $\mu(X) < \infty$, то равномерная сходимость влечет сходимость в среднем.
б) Верно ли предыдущее утверждение, если $\mu(X) = \infty$?
в) Докажите, что сходимость в среднем влечет сходимость по мере.
г) Придумайте пример последовательности интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, сходящейся к нулю в среднем, но не сходящейся ни в одной точке.
д) Придумайте пример последовательности интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, сходящейся к нулю в каждой точке, но не сходящейся в среднем.

7◇7 Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Обозначим через $L^0(X, \mu)$ множество классов эквивалентности измеримых функций на X (функции эквивалентны, если они равны почти всюду). Предположим, что $\mu(X) < \infty$. Для $f, g \in L^0(X, \mu)$ положим

$$\rho(f, g) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}\, d\mu.$$

а) Докажите, что ρ — метрика на $L^0(X, \mu)$.
б) Докажите, что сходимость относительно метрики ρ — это то же самое, что сходимость по мере.
в) Докажите, что $L^0(X, \mu)$ полно относительно метрики ρ.

7◇8* Докажите, что на $L^0[0, 1]$ не существует (не только метрики, но и) топологии, сходимость в которой совпадает со сходимостью почти всюду.