Краткое содержание некоторых лекций

Коммутативная алгебра - матфак ВШЭ

Екатерина Америк

Цель этих записок - в помощь студентам кратко изложить содержание лекций с 7 по 11, поскольку подход к этим темам в каждой книжке свой. Считается, что материал лекций с 1 по 6 (спектр кольца, нетеровы кольца, кольца частных, целые расширения, лемма о нормализации,теорема Гильберта о нулях) изложен в книжках Атьи-Макдональда “Введение в коммутативную алгебру” и Манина “Введение в теорию схем и квантовые группы”, первая половина гл. 1. Лекция 12 (лемма Артина-Риса и многочлены Гильберта-Самюэля) в общих чертах следует книжке Атьи-Макдональда.

1 Тензорное произведение (лекция 7)

1.1 Тензорное произведение модулей

Его удобнее всего определять при помощи универсального свойства. Пусть M, N, P – A-модули. Говорят, что отображение $f : M \times N \to P$ билинейно, если $f(m, *) : N \to P$ и $f(*, n) : M \to P$ – гомоморфизмы A-модулей для любых m, n.

Определение 1 *Тензорное произведение M и N над A - это пара , состоящая из A-модуля T и билинейного отображения $t : M \times N \to T$, такая, что для любого билинейного отображения $f : M \times N \to P$ существует единственный гомоморфизм $h : T \to P$ со свойством $f = ht$.*

Единственность тензорного произведения очевидным образом формально следует из определения, а существование надо доказывать. Оно доказывается явным построением.

Доказательство существования:

Рассмотрим множество $\mathcal{E}$ функций $M \times N \to A$ с конечным носителем. На этом множестве есть очевидная структура A-модуля, причем он свободен с базисом $\delta_{m,n}, m \in M, n \in N$, где $\delta_{m,n}$ - отображение, переводящее пару (m,n) в единицу, а все остальное в ноль. Определим отображение из $M \times N$ в $\mathcal{E}$ по формуле $(m,n) \mapsto \delta_{m,n}$. Оно, конечно, не билинейно, но билинейна его композиция с проекцией на фактормодуль $\mathcal{E}/\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ порожден $\delta_{m+m',n} - \delta_{m,n} - \delta_{m',n}, \delta_{am,n} - a\delta_{m,n}, \delta_{m,n+n'} - \delta_{m,n} - \delta_{m,n'}$ и $\delta_{m,an} - a\delta_{m,n}$ для всевозможных m, m', n, n'. Положим $T = \mathcal{E}/\mathcal{F}$ и пусть $t : M \times N \to T$ - эта композиция. Тогда для любого билинейного $f : M \times N \to P$, существует и единственен гомоморфизм $\mathcal{E} \to P$, переводящий $\delta_{m,n}$ в $f(m,n)$. Очевидно, $\mathcal{F}$ лежит в его ядре, что и требовалось.

Обозначения: $T = M \otimes_A N$, а $m \otimes n$ – образ $\delta_{m,n}$ в $M \otimes_A N$. Очевидно, $M \otimes_A N$ порождается элементами вида $m \otimes n$, которые иногда называют разложимыми: каждый элемент $M \otimes_A N$ есть конечная сумма разложимых.

Из такого определения легко выводятся многие элементарные свойства тензорного произведения, например:

- $A \otimes_A M \cong M$: в самом деле, отображение $(a,m) \mapsto am$ билинейно, значит, оно проводится через тензорное произведение, а обратное отображение задается формулой $m \mapsto 1 \otimes m$.

- $M \otimes_A N = N \otimes_A M$: это следует из билинейности $(m,n) \mapsto n \otimes m$.

- $(M \otimes_A N) \otimes_A P = M \otimes_A (N \otimes_A P)$, так что определено $M \otimes_A N \otimes_A P$, и это универсальный объект для трилинейных отображений.

- Если M свободен с базисом (e_i) и N свободен с базисом (f_j), то $M \otimes_A N$ свободен с базисом $e_i \otimes f_j$: в самом деле, отображение $h_{k,l} : M \times N \to A$, $(\sum_i a_i e_i, \sum_i b_j f_j) \mapsto a_k b_l$ билинейно, так что существует гомоморфизм из $M \otimes_A N$ в , отправляющий $e_k \otimes f_l$ в единицу, а остальные $e_i \otimes f_j$ в нуль; из этого следует линейная независимость $e_i \otimes f_j$, а то, что они порождают $M \otimes_A N$, очевидно.

Если $u : M \to N$ и $v : M' \to N'$ - гомоморфизмы модулей, то определен гомоморфизм $u \otimes v : M \otimes_A M' \to N \otimes_a N'$, $m \otimes n \mapsto u(m) \otimes v(n)$. Если u, v сюрьекции, то $u \otimes v$, очевидно, тоже сюръекция, но если u, v

инъекции, то $u\otimes v$ может быть даже нулевым, например, в случае, когда $u:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ – умножение на p, а v - тождественный гомоморфизм $\mathbb{Z}/pZ$.

Предложение 2 *Функтор тензорного умножения точен справа, то есть, если*

$$0\to M'\to M\to M''\to 0$$

точная последовательность модулей, то точна последовательность

$$M'\otimes_A N\to M\otimes_A N\to M''\otimes_A N\to 0.$$

(доказательство есть в любой стандартной книжке).

Модуль называется плоским, если тензорное умножение на него сохраняет точность последовательностей. Например, A – плоский A-модуль. Легко показать, что тензорное умножение коммутирует с прямыми суммами, а значит, любой свободный модуль является плоским.

Упражнение: покажите, что для любой мультипликативной системы $S\subset A$, $S^{-1}A$ – плоский A-модуль.

1.2 Замена базы

Пусть $h:A\to B$ гомоморфизм колец, а M – A-модуль. Тогда $B\otimes_A M$ имеет очевидную структуру B-модуля, определяемую по формуле $b(b'\otimes m)=bb'\otimes m$. Оказывается, что она обладает универсальным свойством, которое мы сейчас опишем.

Пусть N некий B-модуль. Он является также и A-модулем. Определим гомоморфизм A-модулей $\alpha:B\otimes_A N\to N$ по формуле $b\times n\mapsto bn$ (действительно, соответствующее отображение $B\times N\to N$ билинейно...). Эта конструкция вам уже не раз встречалась: например, если $N=B=\mathbb{C}$, $A=\mathbb{R}$, то $B\otimes_A N$ – это просто комплексификация овеществления $\mathbb{C}$.

Предложение 3 *Пусть M – A-модуль и $j:M\to B\otimes_A M$, $j(m)\mapsto 1\otimes m$, а N – B-модуль. Композиция с j задает биекцию*

$$Hom_B(B\otimes_A M,N)\cong Hom_A(M,N).$$

Таким образом, j является универсальным объектом для A-гомоморфизмов M в B-модули.

Доказательство: обратное отображение - это $g\mapsto\alpha(id_B\otimes g)$.

Следствие 4 *Если* (e_i) *базис* M, *то* $(1 \otimes e_i)$ *базис* $B \otimes_A M$ *как* B*-модуля.*

(для доказательства рассмотреть $M \to A \to B$, переводящее e_k в 1, а остальные базисные векторы в 0, и применить предложение.)

Следствие 5 *Пусть* I *идеал в* A. *Отображение* $M \to M \otimes_A A/I$ *проводится через* M/IM *и определяет изоморфизм* $M/IM \cong M \otimes_A A/I$.

1.3 Тензорное произведение алгебр

Пусть $h : A \to B$, $k : A \to C$ - A-алгебры. A-модуль $B \otimes_A C$ имеет естественную структуру кольца, определяемую по формуле $(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$. В самом деле, для проверки корректности заметим, что $(b, c, b', c') \mapsto (bb', cc')$ квадрилинейное отображение, а значит, оно индуцирует $B \otimes_A C \otimes_A B \otimes_A C \to B \otimes_A C$, отвечающее умножению.

В частности, $B \otimes_A C$ A-алгебра: $a((b \otimes c) = ab \otimes c = b \otimes ac$.

Например:

- $A/I \otimes_A C \cong C/IC$
- $B \otimes_A A[X] \cong B[X]$
- $B \otimes_A A[X]/P \cong B[X]/PB[X]$

Эта A-алгебра обладает универсальным свойством – $B \otimes_A C$ есть "копроизведение" B и C над A:для любой A-алгебры D, $Hom_{A-alg}(B \otimes_A C, D)$ находится во взаимно однозначном соответствии с $Hom_{A-alg}(B, D) \times Hom_{A-alg}(C, D)$ по формуле $r \mapsto (rs, rt)$, где $s : B \to B \otimes_A C, b \mapsto b \otimes 1$ и аналогично для t. .

Пусть теперь $S = Spec(A)$, $X = Spec(B)$, $Y = Spec(C)$. Поскольку гомоморфизмы колец индуцируют отображения их спектров в обратную сторону, получим соответствующее универсальное свойство для $Z = Spec(B \otimes_A C)$, что наводит на мысль о том, что Z является расслоенным произведением $X \times_S Y$. Эта мысль верна, но никак не в категории топологических пространств! Действительно, пусть, например, L/K конечное расширение полей – скажем, $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$; тогда

$$L \otimes_K L \cong K[X]/(X^2 - 1) \otimes_K L \cong L[X]/(X^2 - 1) \cong L \times L,$$

то есть, $Spec(L \otimes_K L)$ состоит из двух замкнутых точек, в то время как $Spec(K)$ и $Spec(L)$ – из одной. Причина, разумеется, в том, что морфизмы спектров как топологических пространств не обязательно происходят из гомоморфизмов колец, а разные отображения колец могут индуцировать одно и то же отображение на спектрах. $X \times_S Y$ - действительно расслоенное произведение, но не в категории топологических пространств, а в категории аффинных схем (см. книжку Манина для всевозможных определений, связанных с аффинными схемами).

Приведем еще один пример: пусть U и V - алгебраические множества, заданные идеалами I и J, так что $U = Spec(k[t_1, \ldots, t_m]/I)$, $V = Spec(k[z_1, \ldots, z_n]/J)$. Тогда $Spec(k[t_1, \ldots, t_m]/I \otimes_k k[z_1, \ldots, z_n]/J)$ задает $U \times V$. Действительно, легко убедиться, что тензорное произведение изоморфно $k[t_1, \ldots, t_m, z_1, \ldots, z_n]/(I + J)$. Множество нулей I - это $U \times \mathbb{A}^n$, а для J это $\mathbb{A}^m \times V$. Их пересечение и есть $U \times V$.

2 Примарное разложение

Хорошая ссылка - книжка Мацумуры: H. Matsumura, Commutative ring theory.

2.1 Ассоциированные простые идеалы

Пусть A – нетерово кольцо, а M – A-модуль. Простой идеал P называется ассоциированным с M (обозначение: $P \in Ass(M)$, или $P \in Ass_A(M)$, если M также является модулем над каким-нибудь другим кольцом и может возникнуть путаница), если $P = ann(x)$ для некоторого $x \in M$. Очевидно, $P \in Ass(M)$ тогда и только тогда, когда M содержит подмодуль, изоморфный A/P, и $Ass(A/P)$, где P простой идеал, состоит из одного элемента P .

Предложение 6 *Множество ассоциированных простых непусто, а их объединение - это множество делителей нуля на M.*

Доказательство: это задача из листка 3. Легко показать, что максимальные элементы в семействе идеалов вида $ann(x)$ - простые идеалы, их множество и будет $Ass(M)$, а их объединение - это в точности делители нуля на M.

Наша следующая цель - доказать конечность $Ass(M)$ в случае, когда M конечно порожден (или, что то же самое, нетеров). Для этого сделаем три наблюдения:

Предложение 7 *1) Для нетерова модуля M существует конечная цепочка подмодулей $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_k = 0$, где $M_i/M_{i+1} \cong A/P_i$ для некоторых простых идеалов P_i. 2) Пусть*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

точная последовательность, тогда

$$Ass(M') \subset Ass(M) \subset Ass(M') \cup Ass(M'').$$

Доказательство: Первая часть тоже задача из листка 3. Первое включение во второй части сразу следует из того, что если $P \in Ass(M)$, то $A/P \subset M$. Пусть теперь $P \in Ass(M) - Ass(M'), P = ann(x)$. Имеем $Ax \cap M' = 0$, поскольку любой ненулевой элемент из пересечения имел бы P своим аннулятором, как следует из простоты P. Значит, Ax изоморфно подмодулю M'', так что $P \in Ass(M'')$.

Следствие 8 *Для нетерова M, $Ass(M)$ конечное множество.*

Доказательство: Действительно, ассоциированные простые содержатся среди $P_1, \ldots, P_{k-1}$ из первой части предыдущего предложения.

Теорема 9 $Ass_A(S^{-1}M) = Ass_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = Ass(M) \cap Spec(S^{-1}A)$ *(здесь мы отождествляем простые идеалы A, не пересекающиеся с S, с соответствующими простыми в $S^{-1}A$). При этом первое включение выполнено вообще для любого $S^{-1}A$-модуля.*

Набросок доказательства: Если $P \subset S^{-1}A$ и $P = ann(x)$, то для $P \cap A$ имеем $P = ann_A(x)$. И наоборот, если $Q = ann_A(x)$, то $Q \cap S = \emptyset$ и $QS^{-1}A = ann_{S^{-1}A}(x)$. Это доказывает первое равенство.

Пусть $P \in Ass(M) \cap Spec(S^{-1}A)$, тогда $P \cap S = \emptyset$ и $A/P \subset M$, а значит, $S^{-1}(A/P) \cong S^{-1}A/S^{-1}P \subset S^{-1}M$. Обратное включение менее очевидно: действительно, если P аннулятор $x \in M$, вообще говоря, неверно, что $Q = P \cap A$ аннулирует x: по определению, $px = 0$ в $S^{-1}A$ значит, что найдется такой $s \in S$, что $psx = 0$. Но в силу нетеровости идеал Q

конечно порожден некоторыми p_i, $1 \leq i \leq k$. Взяв соответствующие s_i, получим, что Q аннулирует $s_1 \dots s_k x$.

Очевидно, все элементы из $Ass(M)$ содержат идеал $ann(M)$. Из теоремы о локализации нетрудно вывести очень важное

Следствие 10 *Минимальные элементы множества $Ass(M)$ - это то же самое, что минимальные простые идеалы, содержащие $ann(M)$.*

Пример 11 *Если $M = A/I$, то идеалы, отвечающие неприводимым компонентам $V(I)$, ассоциированны с M. Но в $Ass(M)$ могут попасть и другие, большие идеалы. Например, если $I = (x^2, xy)$, то ассоциированные простые A/I - это (x) ("изолированная компонента") и (x, y) ("вложенная компонента").*

2.2 Примарное разложение модулей

Пусть M – A-модуль. Подмодуль $N \subset M$ называется (P-) примарным, если $Ass(M/N) = \{P\}$.

Пример 12 *Если $M = A$, $N = I$, то примарность I означает, что все делители нуля в A/I нильпотентны. Другими словами, если $xy \in I$, то $x \in I$ или $y^k \in I$. В этом случае радикал I прост и совпадает с P.*

В общем случае $Ass(M) = \{P\}$ означает, что P единственный минимальный простой над $Ann(M)$, т.е. $r(Ann(M)) = P$, а значит, некоторая степень P аннулирует M, при этом другие элементы - неделители нуля на M.

Предложение 13 *Если N_1, N_2 P-примарны, то $N_1 \cap N_2$ тоже.*

Доказательство: $M/(N_1 \cap N_2) \subset M/N_1 \oplus M/N_2$, а Ass прямой суммы есть объединение Ass.

Определение 14 *Подмодуль N в M неприводим, если $N \neq N_1 \cap N_2$. Примарное разложение N - это представление $N = N_1 \cap \ldots \cap N_r$, где все N_i примарны. Оно называется несократимым, если оттуда нельзя ничего выкинуть, и минимальным, если ассоциированные идеалы N_i попарно различны.*

Теорема 15 *Пусть A нетерово, M конечно порожден.*

1) Неприводимый подмодуль M примарен (так что существует примарное разложение).

2) Если $N = N_1 \cap \ldots \cap N_r$ несократимое примарное разложение, N_i P_i-примарен, то $Ass(M/N) = \{P_1, \ldots, P_r\}$.

3) Любой подмодуль N имеет минимальное примарное разложение. Пусть P минимальный в $Ass(M/N)$, тогда P-примарная компонента определена однозначно и это $f_P^{-1}(N_P)$, где $f_P : M \to M_P$ локализация.

Доказательство: 1) Факторизуя, можно считать, что $N = 0$. Пусть 0 не примарен, тогда в M вкладываются A/P_1 и A/P_2 . Но их пересечение обязано быть нулевым, так как для всех ненулевых элементов, скажем, A/P_1, аннулятор равен P_1 в силу простоты.

2) Опять можно считать, что $N = 0$. Пусть $0 = N_1 \cap \ldots \cap N_r$, тогда $M \subset M/N_1 \oplus \ldots \oplus M/N_r$, так что $Ass(M) \subset \{P_1, \ldots, P_r\}$. Докажем, что, например, $P_1 \in Ass(M)$. Из несократимости $N_2 \cap \ldots \cap N_r \neq 0$. Имеем

$$\cap_{i \neq 1} N_i = \cap_{i \neq 1} N_i / \cap_i N_i \cong (\cap_{i \neq 1} N_i + N_1)/N_1 \subset M/N_1,$$

то есть, $Ass(\cap_{i \neq 1} N_i) = \{P_1\}$, так что $P_1 \in Ass(M)$.

3) Пусть P_1 минимальный ассоциированный. Имеем $N_{P_1} = \cap_i (N_i)_{P_1}$. Поскольку P_1 минимален, $P_j \not\subset P_1$, а значит, $(M/N_j)_{P_1} = 0$. Проверку этого и дальнейшее мы оставляем в качестве упражнения.

Примарные компоненты, отвечающие неминимальным идеалам, вообще говоря, не определены однозначно. В случае, когда $N = I \subset A = M$ идеал, они называются вложенными компонентами подсхемы, определенной I , а остальные, однозначно определенные - изолированными компонентами. Ясно, что их носители - это просто неприводимые компоненты $V(I)$.

Следующее красивое приложение теоремы - “теорема Крулля о пересечении” - аналог того факта, что аналитическая функция локально определяется своим рядом Тейлора.

Теорема 16 *Пусть A локальное нетерово кольцо, M максимальный идеал. Тогда $\cap_i M^i = 0$.*

Доказательство: Докажем, что $I = MI$, где $I = \cap_i M^i$, тогда утверждение получается применением леммы Накаямы. Пусть $MI = Q_1 \cap \ldots \cap$

Q_k примарное разложение, покажем, что все Q_i содержат I . В самом деле, если M радикал Q_i, то это очевидно, поскольку тогда $M^n \subset Q_i$. Если нет, то возьмем элемент x из дополнения к радикалу. Имеем $xI \subset MI \subset Q_i$. Но $x \notin r(Q_i)$. Значит, по примарности $I \subset Q_i$.

3 Размерность Крулля

Пусть A - нетерово кольцо.

Определение 17 *Размерность Крулля*

$$dim(A) = max\ r : \exists\ P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_r,$$

где P_i попарно различные простые идеалы в A.

Очевидно, это то же самое, что комбинаторная размерность топологического пространства $Spec(A)$ (т.е. максимум длин цепочек из замкнутых неприводимых подмножеств).

Размерность Крулля нетерова кольца, вообще говоря, может быть бесконечной, но такие примеры довольно экзотические и мы ими заниматься не будем.

Определение 18 *Пусть P простой идеал, тогда высота*

$$ht(P) = max\ r : \exists\ P = P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_r$$

и ковысота

$$coht(P) = max\ r : \exists\ P = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_r.$$

(P_i по-прежнему простые и попарно различные.)

Очевидно, $ht(P) = dim(A_P)$ и $coht(P) = dim(A/P)$.

Пример 19 $dim(\mathbb{Z}) = 1$, $dim(\mathbb{Z}[X]) = 2$ *(мы описали простые идеалы $\mathbb{Z}[X]$ в первом листке). Ясно, что $dim(K[X_1, \ldots, X_n]) \geq n$, на самом деле $dim(K[X_1, \ldots, X_n]) = n$ и вскоре мы это докажем.*

Теорема 20 *Нульмерные нетеровы кольца - это в точности артиновы кольца.*

Доказательство мы опустим, в нем состояла первая контрольная. См. книжку Атьи и Макдональда.

3.1 Размерность целостных алгебр над полем

Мы собираемся доказать, что размерность конечно порожденной целостной алгебры над полем - это степень трансцедентности ее поля частных, опираясь на лемму Нетер о нормализации. Для этого посмотрим, что происходит с размерностью при целых расширениях. В листках была более или менее доказана следующая "теорема о подъеме":

Теорема 21 *Пусть A, B кольца, B цело над A. Пусть $P_1 \subset \ldots \subset P_n$ цепочка простых идеалов в A и $Q_1 \subset \ldots \subset Q_m$, $m < n$, такая цепочка простых идеалов B, что $Q_i \cap A = P_i$. Тогда ее можно продолжить до $Q_1 \subset \ldots \subset Q_n$, где Q_i простые и $Q_i \cap A = P_i$.*

Из этого сразу следует

Теорема 22 *Если B цело над A, то $dim(B) = dim(A)$.*

Действительно, цепочка различных простых в B ограничивается до цепочки простых в A, причем все они различны (это тоже задача из листка 4), а по теореме о подъеме верно и обратное - цепочка простых в A поднимается до цепочки той же длины в B.

Кроме того, если Q подъем P, то $ht(P) \geq ht(Q)$ по тем же причинам. Для того, чтобы доказать равенство, нужна более трудная "теорема о спуске":

Теорема 23 *Пусть A, B целостные кольца, A целозамкнуто и B цело над A. Пусть $P_1 \supset \ldots \supset P_n$ цепочка простых идеалов в A и $Q_1 \supset \ldots \supset Q_m$, $m < n$, такая цепочка простых идеалов B, что $Q_i \cap A = P_i$. Тогда ее можно продолжить до $Q_1 \subset \ldots \subset Q_n$, где Q_i простые и $Q_i \cap A = P_i$.*

Доказательство теоремы использует две простых леммы:

Лемма 24 *Пусть B цело над A, P_0 идеал в A и $y \in P_0B$. Тогда y цел над P_0: все коэффициенты соответствующего многочлена, кроме единичного старшего, лежат в P_0.*

Доказательство похоже на доказательство леммы Накаямы (уравнение на y получается из того, что некоторый определитель равен нулю) и мы его опускаем, см. книжку Атьи-Макдональда.

Лемма 25 *Пусть A целозамкнуто, B цело над A, так что $L = Frac(B)$ алгебраическое расширение $K = Frac(A)$. Пусть $b \in B$, рассмотрим его минимальный многочлен со старшим коэффициентом единица: $f \in K[X]$. Тогда коэффициенты f лежат в A.*

(b корень унитарного многочлена h с коэффициентами в A, и f делит h в $K[X]$. Поэтому все корни f целы над A, а значит, все коэффициенты тоже, но A целозамкнуто, то есть они лежат в A.)

Доказательство теоремы: очевидно, достаточно рассмотреть случай $n = 2, m = 1$. То есть, для цепочки $P_0 \subset P \subset A$ и Q над P найти простой Q_0, содержащийся в Q и ограничивающийся на A как P.

Рассотрим мультипликативную систему $(A - P_0)(B - Q)$ (она содержит объединение $A - P_0$ и $B - Q$, где $-$ обозначает дополнение) и покажем, что она не пересекается с P_0B; тогда P_0B породит идеал в кольце частных и можно будет взять содержащий его максимальный идеал, ограниченный на B.

Пусть это не так и существуют такие $a \in A - P_0$, $b \in B - Q$, что $ab \in P_0B$. Тогда по лемме ab цел над P_0, а значит, b - корень многочлена g, у которого все коэффициенты, кроме старшего, лежат в P_0, а старший равен a^k. Рассмотрим унитарный минимальный многочлен b над K: $f \in K[X]$. По второй лемме, его коэффициенты лежат в A. Но это значит, что f делит g в $A[X]$. По модулю P_0, g степень X (с точностью до константы), значит, f тоже: $f(X) = X^l + f_1X^{n-1} + \ldots + f_n$, $f_i \in P_0$. Отсюда получается, что $b^l \in P_0B \in Q$. Из простоты Q получаем противоречие ($b \notin Q$).

Замечание: если не предполагать целозамкнутости A, то утверждение неверно! (Пример был на лекции, но там полезно рисовать картинки, а я сейчас с этим не справлюсь.)

Следствие 26 *В предположениях теоремы о спуске, пусть $P \subset A, Q \subset B$ простые и Q лежит над P, тогда $ht(Q) = ht(P)$.*

Лемма 27 *Пусть K поле и $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Заменой координат можно добиться, чтобы f стал унитарным относительно X_n.*

Это примерно та же замена координат, что в лемме Нетер о нормализации.

Теорема 28 *Пусть K поле, R - конечно порожденная целостная K-алгебра. Тогда $dim(R) = deg.tr_K Frac(R)$. Более того, все максимальные* *цепочки простых идеалов имеют длину $dim(R)$ (высота любого максимального идеала равна $dim(R)$).*

Набросок доказательства: Первое утверждение инвариантно относительно целых расширений, так что по лемме Нетер достаточно показать, что размерность кольца многочленов A от d переменных равна d. Докажем это индукцией по d: при $d = 1$ утверждение очевидно. Очевидно также, что $dim(A) \geq d$. Покажем, что $dim(A) \leq d$. Рассмотрим цепочку простых идеалов $0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$. Можно считать, что P_1 высоты 1. Из факториальности следует, что тогда он главный и порожден неприводимым f. Но по лемме мы можем предполагать, что f унитарен по последней переменной, а это значит, что A/P_1 цело над $K[X_1, \ldots, X_{d-1}]$. По предположению индукции $n - 1 \leq d - 1$, то есть $n \leq d$.

Второе утверждение доказывается похожим образом с использованием теоремы о спуске. Она гарантирует, что если цепочка простых идеалов в R, начинающаяся с идеала высоты 1, то соответствующая цепочка в A тоже начнется с идеала высоты 1. Потом факторизуем и ссылаемся на предположение индукции.

Теорема, конечно, неверна для произвольного кольца. Например, в $\mathbb{Z}_p[T]$ есть максимальные идеалы высоты 1 и 2.

3.2 Теорема Крулля о высоте; системы параметров

Вот теорема Крулля о главных идеалах:

Теорема 29 *Пусть R нетерово кольцо, $x \in R$, P минимальный простой, содержащий x. Тогда $ht(P) \leq 1$.*

Доказательство: Локализуя и факторизуя, можно предполагать, что (R, P) локальная область целостности. Пусть $0 \neq Q \subset P$ простой идеал. Q^n не всегда примарен, но у него есть примарная компонента $Q^{(n)} = Q^n R_Q \cap R$, называемая еще символической степенью. Кольцо R/xR имеет только один простой идеал, так что оно артиново. Поэтому $Q^{(n)}R/xR$ стабилизируется и

$$Q^{(n)} \subset Q^{(n)} + xR = Q^{(n+1)} + xR,\ n \geq N;$$

поскольку $x \notin Q$, из примарности выводим, что $Q^{(n)} \subset Q^{(n+1)} + xQ^{(n)}$, и по лемме Накаямы $Q^{(n)} = Q^{(N)}$ для $n \geq N$. Отсюда легко выводится, что пересечение всех $Q^n R_Q$ ненулевое, что противоречит теореме Крулля о пересечении.

Теоремой Крулля о высоте называют следующее обобщение этого факта.

Теорема 30 *Пусть R нетерово кольцо. 1) Если $I \subset R$ идеал, порожденный n элементами, а P минимальный простой, содержащий I, то $ht(P) \leq n$.*

2) Обратно, пусть $ht(P) = n$, тогда найдутся такие $x_1, \ldots, x_n$, что P минимален над $(x_1, \ldots, x_n)$.

В частности, высоты идеалов конечны и размерность локального нетерова кольца конечна.

Доказательство: 1) Индукция по n (случай $n = 1$ уже разобран). Пусть P минимален над $(x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что $ht(P) \geq n+1$, то есть имеется цепочка $P = P_{n+1} \subset \ldots \subset P_0$. Если $x_1 \in P_1$, то факторизуя по P_1, мы быстро придем к противоречию с предположением индукции. Значит, достаточно заменить нашу цепочку цепочкой той же длины, но такой, что x_1 попадет в новый P_1. Пусть $x \in P_k$, но $x \notin P_{k-1}$. Найдем простой идеал, строго содержащийся между P_k и P_{k-2} и содержащий x_1. Это просто: рассмотрим $R_{P_k}/P_{k-2}R_{P_k}$ и там простой идеал, минимальный над x_1. По теореме о главных идеалах это не может быть образ P_k, так как $htP_k \geq 2$. Значит, прообраз этого идеала в R и будет искомым. Повторяя этот процесс для меньших k, в конце концов добъемся $x_1 \in P_1$.

2) Если $ht(P) = 1$, то P не содержится в объединении минимальных простых : иначе он совпал бы с одним из них и высота была бы нулевой (стандартная лемма, см. первую главу Атьи-Макдональда, утверждает, что если I содержится в конечном объединении простых, то I содержится в одном из них). Применим индукцию по n: возьмем x_1 в P, но не в объединении минимальных простых, тогде $ht(P/(x_1))$ в $R/(x_1)$ не больше $n-1$, значит, $P/(x_1)$ минимален над идеалом, порожденным некоторыми $x_2, \ldots x_n$, так что P минимален над идеалом, порожденным x_1 и их прообразами. Теорема доказана.

Пусть (R, M) локальное нетерово кольцо размерности n.

Определение 31 *Система параметров - это такой набор элементов $(x_1, \ldots, x_n)$, что M минимален над $(x_1, \ldots, x_n)$ (или, эквивалентным образом, набор из n элементов, порождающий M-примарный идеал).*

Мы только что доказали, что системы параметров существуют, и показали, как их строить: на каждом шаге надо брать элемент x_{r+1}, чей образ в $R/(x_1, \ldots x_r)$ не содержится в объединении минимальных простых. Например, это будет так, если x_{r+1} не делитель нуля в $R/(x_1, \ldots x_r)$ (такая последовательность называется регулярной).

Предложение 32 *$x_1, \ldots x_r$ дополняется до системы параметров тогда и только тогда, когда $dim(R/(x_1, \ldots x_r)) = dim(R) - r$; в общем случае $dim(R/(x_1, \ldots x_r)) \geq dim(R) - r$.*

На лекциях было также доказано с использованием систем параметров:

Теорема 33 *Пусть R нетерово кольцо. Тогда*

$$dim(R[X_1, \ldots, X_n]) = dim(R[[X_1, \ldots, X_n]]) = dim(R) + n.$$

3.3 Размерность и длина модулей

Пусть M нетеров модуль над нетеровым кольцом R.

Определение 34 *Размерность Крулля M - это $dim(R/ann(M))$*

Очевидно, это то же самое, что $max(dim(R/P)),\ P \in Ass(M)$ или $max(dim(R/P)),\ P \in Supp(M)$ (потому что $Supp(M) = V(ann(M))$).

Определение 35 *Композиционным рядом для M называется максимальная цепочка попарно различных подмодулей*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$$

Предложение 36 *Если M обладает композиционным рядом конечной длины, то все остальные композиционные ряды M имеют ту же длину.*

(доказывается индукцией по длине самого короткого композиционного ряда для M.)

Она называется длиной M и обозначается $l(M)$.

Предложение 37 *Следующие условия эквивалентны:*
1) $l(M)$ конечна
2) все ассоциированные простые M максимальны
3) $dim(M) = 0$.

В доказательстве используется то, что в точной последовательности $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, $dim(M) = max(dim(M'), dim(M''))$: действительно, носитель M - объединение носителей M' и M''.

Наконец, пусть (R, m) локальное кольцо, $x_1, \dots x_n \in m$. Тогда длина $M/(x_1, \dots, x_n)M$ конечна тогда и только тогда, когда $x_1, \dots x_n$ – система параметров для $R/ann(M)$. Такая последовательность $x_1, \dots x_n$ называется системой параметров для M.