7. Седьмая лекция, 30 октября 2012 г.

7.1. **Представления: определение и несколько важных примеров.** Ранее мы изучали действия групп на множествах. Представлением группы называется её действие на векторном пространстве, согласованное со структурой этого векторного пространства.

Определение 7.1. Пусть G — группа, V — конечномерное векторное пространство над полем K. *Представление* группы G в пространстве V — это гомоморфизм $\rho\colon G \to GL(V)$. Пространство V называется *пространством представления*, а размерность $\dim V$ называется *размерностью* представления ρ.

Иными словами, представление сопоставляет каждому элементу группы невырожденный линейный оператор $\rho(g)$ на V, причём произведению элементов группы соответствует композиция операторов, а единичному элементу — тождественный оператор.

Приведём несколько примеров представлений групп.

Пример 7.2. Пусть G — произвольная группа, V — произвольное векторное пространство. *Тривиальное* представление G — это гомоморфизм $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, переводящий любой элемент $g \in G$ в единичный оператор Id_V.

Пример 7.3. Пусть $M \subset V = \mathbb{R}^n$ — произвольное подмножество. Тогда имеется представление групп симметрий $\mathrm{Sym} M$ и вращений $\mathrm{Sym}^+ M$ в пространстве V: каждому элементу группы соответствует преобразование пространства V. В частности, так можно получить трёхмерные представления групп A_4, S_4 и A_5 как групп вращений правильных многогранников.

Пример 7.4 (перестановочное представление)**.** Пусть группа G действует на конечном множестве: $G \curvearrowright X$, где X — конечное множество. Рассмотрим векторное пространство V_X размерности $n = |X|$ с фиксированным базисом $e_{x_1}, \ldots, e_{x_n}$, где $x_1, \ldots, x_n$ — элементы из X. Тогда в пространстве V_X определено представление группы G по правилу

$$\rho(g)e_x = e_{g(x)}.$$

Пример 7.5 (леворегулярное представление)**.** Пусть G — конечная группа. Тогда она действует в пространстве $KG = \langle e_{g_1}, \ldots, e_{g_m} \rangle$. Определим представление R так:

$$R(g)e_h = e_{gh}.$$

Это частный случай перестановочного представления, где $X = G$, а группа действует на себе левыми сдвигами.

Пример 7.6 (праворегулярное представление)**.** Оно устроено так же, как и леворегулярное, только вместо левых сдвигов надо взять правые: $R'(g)e_h = e_{hg^{-1}}$. Контрольный вопрос: зачем там минус первая степень?

Замечание 7.7. Мы будем рассматривать представления групп в *конечномерных* пространствах. Представления в бесконечномерных пространствах (обычно с дополнительной структурой, например, в гильбертовых пространствах) тоже имеет смысл рассматривать, но это совсем другая история. Кроме того, мы довольно скоро предположим, что основное поле K алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль (или что вообще $K = \mathbb{C}$). Теория представлений групп над алгебраически незамкнутыми полями и полями конечной характеристики — это тоже важный сюжет, но там жизнь устроена значительно сложнее, чем над $\mathbb{C}$.

Замечание 7.8 (терминологическое). Мы часто будем допускать различные вольности в словоупотреблении. Так, словом “представление” мы иногда будем называть не гомоморфизм, а само пространство V. Кроме того, оператор $\rho(g)$, действующий на пространстве V, иногда будет обозначаться g_V, а иногда — даже просто g (когда будет ясно, о каком пространстве идёт речь).

7.2. **Операции над представлениями.** На множестве векторных пространств имеются операции прямой суммы, тензорного произведения и взятия двойственного пространства. Кроме того, у векторных пространств бывают подпространства, по которым можно брать фактор. Те же понятия можно перенести и на представления, которые, по сути дела, являются векторными пространствами с дополнительной структурой (т.е. с действием группы).

Определение 7.9. Пусть $\rho_1 \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(W)$ — два представления группы G (одной и той же!). *Прямая сумма* представлений $\rho_1 \oplus \rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(V \oplus W)$ — это представление группы G в пространстве $V \oplus W$, действие на котором определено по правилу

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v, w) = (\rho_1(g)v, \rho_2(g)w).$$

При этом, если выбрать в пространствах V и W базисы, то в соответствующем базисе пространства $V \oplus W$ матрица оператора $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)$ запишется блочной матрицей $\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$.

Определение 7.10. *Тензорное произведение* представлений $\rho_1 \otimes \rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(V \otimes W)$ — это представление группы G в пространстве $V \otimes W$, действие на котором определено на *разложимых* тензорах из $V \otimes W$ по правилу

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v \otimes w) = (\rho_1(g)v) \otimes (\rho_2(g)w),$$

и продолжено по линейности на неразложимые тензоры.

Определение 7.11. *Сопряжённое представление* к представлению $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — это представление ρ' группы G в пространстве линейных функционалов V^*, определённое по правилу

$$\rho'(g)(\xi(v)) = \xi(\rho(g)^{-1}v), \qquad \xi \in V^*.$$

Отметим, что при этом определении каноническое спаривание $V \times V^* \to K$, $(v, \xi) \mapsto \langle \xi, v\rangle = \xi(v)$ окажется G-инвариантным:

$$\langle \xi, v\rangle = \langle \rho'(g)\xi, \rho(g)v\rangle \qquad \forall g \in G.$$

7.3. **Морфизмы представлений, подпредставления, неприводимость и неразложимость.**

Определение 7.12. Пусть V и W — представления одной и той же группы G. Линейное отображение векторных пространств $\varphi\colon V \to W$ называется *морфизмом представлений*, или *сплетающим оператором*, если оно перестановочно с действием группы G на V и W, т.е. если

$$g_W(\varphi(v)) = \varphi(g_V(v)) \qquad \forall v \in V.$$

Определение 7.13. *Ядро* $\operatorname{Ker}\varphi \subset V$ и *образ* $\operatorname{Im}\varphi \subset W$ — это ядро и образ φ как отображения векторных пространств.

Определение 7.14. *Подпредставление* $U \subset V$ — это подпространство в пространстве V, инвариантное относительно действия G (т.е. такое, что $\rho(g)u \in U$ для любых $g \in G$, $u \in U$).

Упражнение 7.15. Дайте определение факторпредставления.

Упражнение 7.16. Проверьте, что ядро и образ морфизма представлений $\varphi\colon V \to W$ — это подпредставления в V и W соответственно.

У каждого представления всегда есть два тривиальных подпредставления: это 0 и оно само.

Определение 7.17. Представление называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных подпредставлений.

Определение 7.18. Представление называется *неразложимым*, если оно не раскладывается в прямую сумму двух нетривиальных подпредставлений.

Ясно, что из неприводимости следует неразложимость: если у представления вовсе нет подпредставлений, то о разложении в прямую сумму не может быть и речи. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 7.19. Рассмотрим двумерное представление аддитивной группы $\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(K)$, $n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Линейная оболочка первого базисного вектора есть подпредставление, дополнение к которому не выделяется прямым слагаемым. Таким образом, это представление приводимо, но неразложимо.

К счастью, для достаточно большого класса групп понятия неприводимости и неразложимости совпадают. Как мы сейчас докажем, к этому классу относятся все конечные группы (а в лекции 11 мы увидим, что для компактных групп это тоже верно, причём доказательство практически ничем не отличается).

7.4. **Полная приводимость и теорема Машке.**

Определение 7.20. Представление V группы G называется *вполне приводимым*, если для каждого его подпредставления $W \subset V$ найдётся дополнительное подпредставление (т.е. такое подпредставление $U \subset V$, что $V = U \oplus W$).

Замечание 7.21 (терминологическое). Всякое неприводимое представление является вполне приводимым.

Теорема Машке утверждает, что представления *конечных* групп вполне приводимы, если характеристика поля не делит порядок группы или равна нулю. Сейчас мы докажем эту теорему в случае, когда основное поле — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Доказательство для произвольного поля будет приведено в следующей лекции.

Определение 7.22. Скалярное произведение на пространстве представления V называется G-инвариантным, если $(gv, gw) = (v, w)$ для любых $g \in G$ и $v, w \in V$.

Лемма 7.23. *На каждом вещественном или комплексном представлении конечной группы G существует положительно определенное (соотв. эрмитово) G-инвариантное скалярное произведение.*

Доказательство. Пусть $(\,,\,)$ — произвольное положительно определённое или эрмитово скалярное произведение. Построим по нему G-инвариантное скалярное произведение, усреднив его по группе. А именно, определим новое скалярное произведение $(\,,\,)_G$ по формуле

$$(v, w)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gu, gw).$$

(без множителя $1/|G|$ при желании можно и обойтись). Ясно, что $(gu, gv)_G = (u, v)_G$, так как левый сдвиг на группе просто будет переставлять слагаемые в правой части формулы, то есть построенное скалярное произведение будет G-инвариантно. $\square$

Теорема 7.24 (Машке)**.** *Пусть V — вещественное или комплексное представление конечной группы G, W — подпредставление в V. Тогда в V найдётся дополнительное подпредставление U, т.е. такое подпредставление, для которого $U \oplus W = V$.*

Доказательство. В качестве U можно взять $U = W^{\perp} = \{u \in V \mid (u, w)_G = 0 \quad \forall w \in W\}$, где ортогональное дополнение берется относительно G-инвариантного положительно определенного (соотв. эрмитова) скалярного произведения. Тогда $V = W \oplus U$ как векторные пространства. Осталось проверить, что U является подпредставлением группы G. Проверим это: пусть $u \in U$, убедимся, что $gu \in U$. Для этого надо доказать, что $(gu, w)_G = 0$ для любого $w \in W$. Действительно,

$$(gu, w) = (g^{-1}(gu), g^{-1}(w))_G = (u, g^{-1}w)_G = 0,$$

поскольку $g^{-1}w \in W$ (так как W — подпредставление), а $u \in W^{\perp}$. Поэтому U является дополнительным подпредставлением к W. $\square$

Следствие 7.25. *Всякое представление конечной группы над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ вполне приводимо.*

8. Восьмая лекция, 6 ноября 2012 г.

8.1. **Другое доказательство теоремы Машке.** Докажем теорему Машке в более общем виде: для произвольного поля, не обязательно для $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Теорема 8.1 (Машке)**.** *Пусть V — представление конечной группы G над полем K, причём $|G| \not| \operatorname{char} K$. Пусть W — подпредставление в V. Тогда в V найдётся дополнительное подпредставление U, т.е. такое подпредставление, для которого $U \oplus W = V$.*

Доказательство. Основная идея этого доказательства та же, что и предыдущего: каким-то образом выбрать дополнительное к W подпространство, а потом "подправить" этот выбор так, чтобы дополнение было бы G-инвариантным.

Напомним, что оператор $\pi\colon V \to V$ называется *проектором* на подпространство W, если $\pi|_W = Id_W$ и $\operatorname{Im}\pi = W$. Из линейной алгебры известно, что в этом случае $V = W \oplus \operatorname{Ker}\pi$. То есть $\operatorname{Ker}\pi$ — дополнительное к W подпространство. Проблема только в том, что оно может быть не G-инвариантным. Исправить это можно опять-таки с помощью усреднения по группе G.

Возьмём произвольный проектор π на подпространство W. Определим новый оператор π_G по следующей формуле:

$$\pi_G(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g_V v).$$

Легко видеть, что π_G снова является проектором на подпространство W. Для этого надо проверить, что для любого $w \in W$ оператор π_G оставляет его на месте: $\pi_G(w) = w$, и что $\operatorname{Im}\pi_G \subset W$. Эта проверка оставляется читателю в качестве лёгкого упражнения.

Кроме того, π_G является морфизмом представлений. Проверим это: действительно, для любого $h \in G$ и для любого $v \in V$

$$h_V(\pi_G(v)) = h_V\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g_V v\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} h_V g_V v = \\ = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(h_V g_V h_V^{-1}) h_V v = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g_V h_V v = \pi_G(h_V v).$$

(в предпоследнем равенстве мы воспользовались тем, что действие группы на себе сопряжениями — это биекция).

Мы видели в прошлой лекции, что ядро морфизма — это подпредставление. Поэтому $\operatorname{Ker}\pi_G$ и есть искомое дополнительное к W подпредставление. $\square$

8.2. **Лемма Шура.** Это очень простое, но в то же время крайне полезное утверждение о том, как устроены морфизмы между *неприводимыми* представлениями.

Теорема 8.2 (лемма Шура)**.** *Пусть V, W — неприводимые представления группы G, $\varphi\colon V \to W$ — морфизм представлений. Тогда:*

(1) *либо φ — изоморфизм (т.е. $V \cong W$), либо $\varphi = 0$;*
(2) *если основное поле алгебраически замкнуто, то $\varphi = \lambda \mathrm{Id}$ (т.е. всякий изоморфизм неприводимых представлений пропорционален тождественному).*

Доказательство. 1) Поскольку φ — морфизм, $\operatorname{Ker}\varphi$ — подпредставление в V. Но V неприводимо, поэтому либо $\operatorname{Ker}\varphi = V$ (откуда $\varphi = 0$), либо $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, и φ — мономорфизм.

Аналогично из того, что $\operatorname{Im}\varphi$ — подпредставление в W, заключаем, что φ — эпиморфизм. Поэтому φ либо нуль, либо изоморфизм.

2) Пусть $\varphi\colon V \to V$ — изоморфизм представлений. Кроме того, $\lambda\mathrm{Id}\colon V \to V$ — тоже морфизм представлений. Значит, их разность $\varphi - \lambda\mathrm{Id}$ опять-таки является морфизмом представлений при любом λ.

Пусть теперь λ равняется какому-нибудь собственному значению оператора φ (над алгебраически замкнутым полем у любого оператора есть собственное значение!). Тогда оператор $\varphi - \lambda\mathrm{Id}$ вырожден, т.е. $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{Id}) \neq 0$. Но ядро морфизма — подпредставление в неприводимом представлении V, поэтому $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{Id}) = V$. Стало быть, $\varphi = \lambda\mathrm{Id}$, что и требовалось. □

8.3. **Представления абелевых групп.** Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — представление группы G. Всякий элемент $g \in G$ определяет отображение $g_V\colon V \to V$. Это отображение, вообще говоря, не будет морфизмом: нет никакой причины, по которой оно должно быть перестановочно с действием других элементов группы G. Иначе говоря, для какого-либо другого элемента $h \in G$ может случиться так, что $h_V g_V \neq g_V h_V$. Ясно, что это равенство будет всегда выполнено, если $g \in Z(G)$. Соответственно, для элемента $g \in Z(G)$ центра группы G отображение g_V будет морфизмом.

Упражнение 8.3. Докажите, что это условие не только достаточное, но и необходимое: иначе говоря, для любого элемента $g \notin Z(G)$ *найдётся* такое представление V, для которого $g_V\colon V \to V$ не будет морфизмом.

Пускай теперь у нас выполнены условия леммы Шура, и пусть G — *абелева* группа. Тогда $Z(G) = G$. Пусть V — неприводимое представление группы G. Для всякого элемента $g \in G$ оператор $g_V\colon V \to V$ является морфизмом. Согласно лемме Шура, он скалярен. Получается, что всякий элемент группы G действует на представлении V скалярной матрицей. Поэтому всякое подпространство в V инвариантно относительно G. Но в силу неприводимости представления V это возможно только в том случае, когда $\dim V = 1$.

Мы доказали следующее

Предложение 8.4. *Все представления абелевой группы над алгебраически замкнутым полем одномерны, т.е. являются гомоморфизмами $G \to K^*$.*

Гомоморфизмы $\mathrm{Hom}(G, K^*)$ сами образуют абелеву группу (относительно композиции). Эта группа называется *двойственной* к G и обозначается $G^\vee$.

Упражнение 8.5. Докажите, что $G^\vee \cong G$. (Этот изоморфизм не является каноническим, он напоминает изоморфизм между пространством и двойственным к нему).

9. Девятая лекция, 13 ноября 2012 г.

9.1. **Два следствия из теоремы Машке.**

Следствие 9.1 (об унитаризуемости/ортогонализуемости представлений)**.** *Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — комплексное (соотв. вещественное) представление конечной группы G. Тогда на V существует такая невырожденная эрмитова (соотв. положительно определённая симметрическая) форма, для которой все операторы $\rho(g)$ будут являться унитарными (соотв. ортогональными).*

Доказательство. Условие унитарности/ортогональности оператора $\rho(g)$ можно записать так:

$$(\rho(g)v, \rho(g)w) = (v, w) \text{ для любых } v, w \in V.$$

Это условие имеет место для G-инвариантной эрмитовой (соотв. положительно определённой симметрической) формы, построенной в первом доказательстве теоремы Машке. □

Следствие 9.2. *Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — комплексное представление конечной группы. Тогда всякий оператор $\rho(g)$ диагонализуем (т.е. для него существует базис из собственных векторов), причём все его собственные значения по модулю равны 1.*

Доказательство. Действительно, это утверждение верно для любого унитарного оператора. □

Замечание 9.3. Вообще говоря, неверно, что все операторы $\rho(g)$ диагонализуемы *одновременно* (т.е. в одном и том же базисе): это значило бы, что представление распадается в прямую сумму одномерных, что имеет место далеко не всегда.

9.2. **Характеры.** Далее мы будем считать, что основным полем является поле $\mathbb{C}$. Таким образом, для представлений конечных групп имеют место теорема Машке и лемма Шура.

Определение 9.4. Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — представление группы G. *Характером* этого представления называется комплекснозначная функция на группе G, значение которой в точке g равняется следу оператора g_V:

$$\chi_V\colon G \to \mathbb{C}, \qquad \chi_V(g) = \operatorname{tr} g_V.$$

Замечание 9.5. Элемент $e \in G$ действует на пространстве V единичным оператором, след которого равен размерности пространства. Поэтому $\chi_V(e) = \dim V$.

Пример 9.6. Характер тривиального представления — функция, равная 1 во всех точках группы G.

Пример 9.7. Пусть $G \to \mathrm{GL}(V)$ — перестановочное представление, происходящее из действия группы G на конечном множестве X. Тогда значение характера $\chi_V(g)$ на элементе g равно количеству точекиз X, неподвижных относительно действия G:

$$\chi_V(g) = \#\{x \in X : g \circ x = x\}.$$

Для доказательства этого следует записать матрицу g_V в базисе $\{e_x\}$ — это будет матрица перестановки, и отметить, что единицы на диагонали этой матрицы соответствуют неподвижным точкам.

Пример 9.8. Пусть R — регулярное представление конечной группы G (т.е. перестановочное представление, отвечающее действию G на себе левыми сдвигами). Тогда

$$\chi_R(g) = \begin{cases} |G|, & g = e; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Действительно, левый сдвиг на неединичный элемент g не имеет неподвижных точек на G: они отвечали бы решениям уравнения $gx = x$, а такое уравнение при $g \neq e$ решений в G неразрешимо.

Характеры замечательны тем, что они "хорошо себя ведут" при взятии прямой суммы и тензорного произведения представлений.

Предложение 9.9. *Пусть V и W — представления конечной группы G. Тогда:*

(1) $\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$;
(2) $\chi_{V \otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g)$;
(3) $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)}$.

Доказательство. Пусть $g \in G$ — произвольный элемент группы. Согласно следствию 9.2, для него существуют собственные базисы $v_1, \dots, v_n$ и $w_1, \dots, w_m$ пространств V и W соответственно:

$$g_V v_i = \lambda_i v_i, \qquad g_W w_j = \mu_j w_j.$$

Поскольку след оператора равен сумме его собственных значений, $\chi_V(g) = \sum \lambda_i$ и $\chi_W(g) = \sum \mu_j$.

Набор векторов $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$ является базисом пространства $V \oplus W$, собственным для оператора $g_{V \oplus W}$. Поэтому след данного оператора равен $\sum \lambda_i + \sum \mu_j$, т.е. $\chi_V(g) + \chi_W(g)$.

Аналогично доказывается и второе равенство: $v_i \otimes w_j$ является базисом пространства $V \otimes W$, собственным для оператора $g_{V \otimes W}$, поэтому след последнего равняется $\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \chi_V(g)\chi_W(g)$.

Последнее равенство вытекает из того, что если диагонализуемый оператор A имеет собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на пространстве V, то сопряжённый к нему оператор A^* на пространстве V^* имеет собственные значения $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$. Поскольку собственные значения g_V по модулю равны 1, для них имеется равенство

$\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$. Поэтому след оператора g_{V^*} равняется $\lambda_1^{-1} + \dots + \lambda_n^{-1} = \overline{\lambda_1} + \dots + \overline{\lambda_n} = \overline{\chi_V(g)}$. □

9.3. **Первая формула проекции.** Пусть V — произвольное представление группы G. *Подпространством инвариантов* группы G назовём подпространство

$$V^G = \{v \in V \mid g_V v = v \quad \forall g \in G\} \subset V.$$

Ясно, что это подпредставление, являющееся суммой всех тривиальных подпредставлений в V. Оказывается, несложно выписать проектор на это подпредставление:

Предложение 9.10. *Положим*

$$\pi_V = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_V \in \operatorname{End}(V).$$

Тогда π_V есть морфизм представлений, являющийся проектором на V^G.

Доказательство. Сперва проверим, что π_V — морфизм представлений. Для этого надо проверить, что $\pi_V h_V = h_V \pi_V$ для любого $h \in G$.

$$\pi_V h_v = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_V\right) h_V = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h_V h_V^{-1} g_V h_V =$$
$$= \frac{1}{|G|} h_V \sum_{g \in G} h_V^{-1} g_V h_V = h_V \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_V\right) = h_V \pi_V.$$

(в предпоследнем равенстве мы меняем порядок суммирования, пользуясь тем, что сопряжение есть взаимно-однозначное отображение группы в себя).

Далее, проверим, что π_V есть проектор на V^G. Для этого надо проверить две вещи: что всякий вектор из V^G переходит под действием π_V в себя (т.е. π_V при ограничении на V^G даёт тождественный оператор) и что $\operatorname{Im} \pi_V \subset V^G$.

Проверим первое. Пусть $w \in V^G$. Тогда $g_V w = w$ для любого g, и

$$\pi_V w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_V w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w = \frac{|G|}{|G|} w = w.$$

Наконец, чтобы убедиться, что $\operatorname{Im} \pi_V \subset V^G$, покажем, что всякий вектор из $\operatorname{Im} \pi_V$ инвариантен относительно любого элемента $h \in G$:

$$h_V(\pi_V v) = h_V \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_V v\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h_V g_V v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_V v = \pi_V v.$$

(снова меняем порядок суммирования, но при этом применяем не сопряжение, а левый сдвиг). □

Поскольку след проектора равен размерности его образа, получаем такое следствие:

Следствие 9.11. $\dim V^G = \operatorname{tr}\pi_V$.

9.4. **Соотношение ортогональности для характеров.** Из результатов двух предыдущих параграфов получается следующий результат, который для нас окажется ключевым.

Теорема 9.12. *Пусть V, W — неприводимые представления конечной группы G. Тогда*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) = \begin{cases}1, & V\cong W;\\ 0, & V\ncong W.\end{cases}$$

Доказательство. Как обсуждалось в прошлой лекции, морфизмы из V в W суть G-инварианты в представлении $\operatorname{Hom}(V,W)$. Их пространство одномерно, если V и W изоморфны, и нульмерно в противном случае. Но $\operatorname{Hom}(V,W)\cong V^*\otimes W$. Поэтому

$$\dim\operatorname{Hom}_G(V,W) = \dim(\operatorname{Hom}(V,W))^G = \dim(V^*\otimes W)^G = \begin{cases}1, & V\cong W;\\ 0, & V\ncong W.\end{cases}$$

Вычислим $\dim(V^*\otimes W)^G$ по предыдущему следствию как след соответствующего проектора:

$$\dim(V^*\otimes W)^G = \operatorname{tr}\pi_{V^*\otimes W} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{tr} g_{V^*\otimes W} =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^*\otimes W}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^*}(g)\chi_W(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g),$$

что и доказывает теорему.

□

9.5. **Центральные функции.** Следующее свойство характеров очевидным образом вытекает из инвариантности следа оператора, т.е. равенства $\operatorname{tr}A = \operatorname{tr}C^{-1}AC$:

Предложение 9.13. $\chi_V(g) = \chi_V(h^{-1}gh)$.

Поэтому характер представления принимает одно и то же значение на всех представителях одного и того же класса сопряжённых элементов в группе G.

Можно дать общее определение:

Определение 9.14. Функция на группе $\alpha\colon G\to\mathbb{C}$ называется *центральной*, если она постоянна на классах сопряжённых элементов, т.е. для любых $g, h\in G$

$$\alpha(g) = \alpha(h^{-1}gh).$$

Пространство всех центральных функций мы будем обозначать как $\mathbb{C}^{class}G$. Его размерность равна числу классов сопряжённости в группе G. Характеры являются примерами центральных функций.

Введём на пространстве $\mathbb{C}^{class}G$ эрмитово скалярное произведение по формуле:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \beta(g).$$

Упражнение 9.15. Проверьте, что это действительно эрмитово скалярное произведение.

Это определение позволяет переформулировать теорему 9.12:

Следствие 9.16. *Характеры неприводимых представлений образуют ортонормированную систему векторов в пространстве* $\mathbb{C}^{class}G$*:*

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1, & V \cong W; \\ 0, & V \ncong W. \end{cases}$$

10. Десятая лекция, 20 ноября 2012 г.

Из теоремы 9.12 сразу следует масса замечательных результатов о представлениях группы G.

10.1. **Следствия соотношений ортогональности.**

Следствие 10.1. *Характеры различных неприводимых представлений линейно независимы как элементы* $\mathbb{C}^{class}G$.

Доказательство. Действительно, ортогональная система векторов является линейно независимой. □

Следствие 10.2. *Число неприводимых представлений группы G не превосходит числа её классов сопряжённости.*

Доказательство. Количество векторов ортогональной системы не превосходит размерности объемлющего пространства $\mathbb{C}^{class}G$, т.е. числа классов сопряжённости. □

Замечание 10.3. Далее мы увидим, что это неравенство на самом деле является равенством.

Следствие 10.4. *Представление V неприводимо тогда и только тогда, когда $\langle \chi_V, \chi_V\rangle = 1$.*

Доказательство. Пусть $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, где V_i неприводимы. Тогда $\chi_V = \chi_{V_1} + \dots + \chi_{V_n}$, откуда по полуторалинейности скалярного произведения получаем, что

$$\langle \chi_V, \chi_V\rangle = \sum_{i,j} \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j}\rangle = \sum_i \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i}\rangle = n.$$

□

Следствие 10.5. *Пусть V — произвольное представление, W — неприводимое представление группы G. Тогда кратность вхождения W в V равна $\langle \chi_W, \chi_V\rangle$.*

Доказательство. Докажите это сами. □

Следствие 10.6. *Представление полностью определяется своим характером (у различных представлений разные характеры).*

Доказательство. Действительно, предыдущее следствие утверждает, что кратность вхождения всякого неприводимого представления W в данное представление V однозначно определяется по χ_V. □

Следствие 10.7. *Кратность вхождения любого неприводимого представления V в регулярное R равна* $\dim V$.

Доказательство. Вычислим $\langle \chi_V, \chi_R\rangle$:

$$\langle \chi_V, \chi_R\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}\chi_R(g) = \frac{1}{|G|}\overline{\chi_V(e)}\chi_R(e) = \frac{|G|}{|G|}\overline{\chi_V(e)} = \dim V.$$

(здесь мы пользуемся тем, что характер регулярного представления равен $|G|$ в единице группы и нулю в остальных точках — см. пример 9.8). $\square$

Следствие 10.8 (Формула Бернсайда)**.** *Пусть $d_1, \ldots, d_k$ — размерности всех неприводимых представлений группы G. Тогда*

$$|G| = d_1^2 + \cdots + d_k^2.$$

Доказательство. Это вытекает из двух предыдущих следствий (напомним, что $|G|$ — это размерность регулярного представления). $\square$

10.2. **Вторая формула проекции.** Наша следующая цель — понять, что неприводимых представлений *столько же*, сколько классов сопряжённости в группе. Это эквивалентно тому, что их характеры образуют *базис* (а не просто ортонормированную систему) в пространстве центральных функций.

Предложение 10.9. *Пусть $\alpha \in \mathbb{C}^{class}G$ — центральная функция, V — произвольное представление группы G (возможно, приводимое). Тогда линейный оператор*

$$\pi_{\alpha,V} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)g_V \colon V \to V$$

является морфизмом представлений.

Замечание 10.10. При $\alpha \equiv 1$ это предложение есть часть предложения 9.10, а $\pi_{\alpha,V}$ — проектор на подпространство инвариантов.

Доказательство. Проверим, что для любого элемента $h \in G$ оператор h_V перестановочен с $\pi_{\alpha,V}$. Действительно,

$$\pi_{\alpha,V}h_V = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)g_V h_V = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)h_V h_V^{-1}g_V h_V =$$
$$= h_V\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(h^{-1}gh)(h_V^{-1}g_V h_V) = h_V\pi_V.$$

$\square$

Задача 10.11. Докажите обратное: если $\alpha \notin \mathbb{C}^{class}G$, то найдётся такое представление, для которого $\pi_{\alpha,V}$ не будет морфизмом представлений.

Теорема 10.12. *Характеры неприводимых представлений χ_V образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{C}^{class}V$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть существует такая функция $\alpha \in \mathbb{C}^{class}G$, ортогональная характерам *всех* неприводимых представлений. Значит, она ортогональна характерам всех представлений (каждое представление есть прямая сумма неприводимых). Пусть V — неприводимое представление. Тогда

$$\langle \alpha, \chi_V \rangle = 0.$$

Рассмотрим морфизм $\pi_{\alpha,V}$ и докажем, что он является нулевым (как эндоморфизм пространства V). Действительно, по лемме Шура $\pi_{\alpha,V} = \lambda \cdot Id$. Вычислим константу λ. Для этого заметим, что $\lambda \dim V = \operatorname{tr} \pi_{\alpha,V}$, и вычислим след оператора $\pi_{\alpha,V}$:

$$\operatorname{tr} \pi_{\alpha,V} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} \alpha(g) g_V = \frac{1}{|G|} \sum \alpha(g) \chi_V(g) =$$
$$= \overline{\frac{1}{|G|} \sum \overline{\alpha(g)} \cdot \overline{\chi_V(g)}} = \overline{\langle \alpha, \chi_{V^*} \rangle} = 0.$$

Поэтому $\lambda = 0$, и оператор $\pi_{\alpha,V}$ тождественно равен нулю.

Далее мы выведем отсюда, что $\alpha \equiv 0$ как функция на группе.

Определение 10.13. Представление $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ называется *точным*, если оно является мономорфизмом (т.е. $\rho(g) \neq 1_V$ при $g \neq e$).

Предложение 10.14. *Регулярное представление R является точным; соответствующие элементы $g_R \in \operatorname{End} R$ линейно независимы (как эндоморфизмы пространства R).*

Доказательство. Рассмотрим базисные векторы $e_g \in R$. Возьмём среди них отвечающий единичному элементу группы e_{id}. Поскольку $g_R(e_{id}) = e_g$, а все e_g, будучи базисными векторами, линейно независимы, то и g_R тоже линейно независимы. □

Вернёмся к доказательству того, что $\alpha = 0$. Мы знаем, что $\pi_{\alpha,V}$ есть нулевой оператор для любого представления V. Рассмотрим этот оператор для регулярного представления, получим, что

$$\sum \alpha(g) g_R = 0$$

как элемент $\operatorname{End} R$. Но, с другой стороны, предыдущее предложение утверждает, что g_R линейно независимы. Следовательно, $\alpha(g) = 0$ при любом g. Получаем, что всякая функция на группе, ортогональная всем характерам неприводимых представлений, тождественно равна нулю. Что и требовалось доказать. □

Следствие 10.15. *Пусть k — количество классов сопряжённости в группе G. Существует ровно k неприводимых представлений группы G, назовём их $V_1, \dots, V_k$. При этом регулярное представление изоморфно сумме*

$$R = V_1^{\dim V_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\dim V_k}.$$

Задача 10.16. Докажите, что $\pi_{\chi_{V_i^*},R}$ есть проектор на компоненту $V_i^{\dim V_i}$.

10.3. **Групповая алгебра.** Пусть R — регулярное представление группы G. На пространстве R можно ввести умножение, определив его на базисных векторах по правилу

$$e_g e_h = e_{gh}.$$

Мы получим ассоциативную некоммутативную алгебру над $\mathbb{C}$ с единицей, называемую *групповой алгеброй* группы G. Она обозначается через $\mathbb{C}G$.

Определение 10.17. *Представление* групповой алгебры в векторном пространстве V — это гомоморфизм алгебр $\mathbb{C}G \to \operatorname{End} V$.

Ясно, что такой гомоморфизм задаёт на V структуру левого $\mathbb{C}G$-модуля.

Кроме того, всякое представление

$$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$$

можно однозначно продолжить по линейности до гомоморфизма *алгебр*

$$\tilde{\rho}\colon \mathbb{C}G \to \operatorname{End}(V).$$

Выше мы видели, что $R = V_1^{\dim V_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\dim V_k}$. Оказывается, имеет место более сильное утверждение.

Теорема 10.18. *Имеется изоморфизм алгебр*

$$\mathbb{C}G \cong \operatorname{End}(V_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{End}(V_k).$$

(иными словами, $\mathbb{C}G$ изоморфна прямой сумме матричных алгебр, каждая из которых есть алгебра эндоморфизмов одного из её неприводимых представлений).

Доказательство. Поскольку V_i — это (неприводимые) представления, у нас имеются гомоморфизмы алгебр

$$\mathbb{C}G \to \operatorname{End}(V_i).$$

Можно рассмотреть диагональное отображение в прямую сумму:

$$\mathbb{C}G \cong \operatorname{End}(V_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{End}(V_k).$$

Оно инъективно, поскольку регулярное представление точно. С другой стороны, левая и правая часть имеют одинаковые размерности (это формула Бернсайда). Значит, это отображение есть изоморфизм. $\square$

11. Одиннадцатая лекция, 27 ноября 2012 г.

Ближайшие три лекции будут посвящены группам Ли и классификации представлений группы Ли SU_2.

Группой Ли называется абстрактная группа, которая снабжена структурой гладкого многообразия (вещественного или комплексного). Иначе говоря, группа Ли — это многообразие, на котором введена структура группы.

11.1. **Напоминание о многообразиях.** Пусть K — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Для простоты мы будем работать только с многообразиями, вложенными в K^n.

Определение 11.1. Подмножество $M \subset K^n$ называется *d-мерным гладким многообразием*, если в некоторой окрестности любой своей точки $p \in M$ его можно задать при помощи системы уравнений

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \qquad i = 1, \dots, m$$

где $m = n - d$, причём матрица частных производных этой системы имеет полный ранг: $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(p) = m$.

Замечание 11.2. Всякое *открытое* подмножество в K^n локально задаётся пустой системой уравнений, следовательно, является n-мерным многообразием. Всякое *дискретное* подмножество в K^n локально задаётся системой уравнений $x_i = p_i$ и поэтому является нульмерным подмногообразием.

Равенство $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(p) = m$ означает, что некоторый минор порядка m матрицы частных производных отличен от нуля. Будем считать, что это минор, образованный первыми m столбцами матрицы. Тогда по теореме о неявной функции переменные $x_1, \dots, x_m$ выражаются при помощи гладких функций через свободные переменные, в качестве которых можно взять $x_{m+1}, \dots, x_n$:

$$x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n);$$
$$\dots$$
$$x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Касательное пространство T_pM в точке $p \in M$ состоит из векторов $(dx_1, \dots, dx_n)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$df_i(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \qquad (i = 1, \dots, m)$$

Размерность касательного пространства есть пространства решений этой системы, то есть $d = n - m$.

11.2. **Группы Ли: определение и примеры.** Перейдём к определению группы Ли. Мы будем рассматривать только *линейные*, или *матричные* группы Ли — т.е. такие, которые являются подгруппами в $GL_n(K)$.

Определение 11.3. *Линейная группа Ли* — это подгруппа в $\mathrm{GL}_n(K)$, являющаяся гладким многообразием в пространстве $\mathrm{Mat}_n(K)$.

Условие линейности не является очень ограничительным — неформально говоря, все важные группы Ли являются линейными. Бывают такие группы Ли, которые не вкладываются в группу матриц, однако это некоторая экзотика.

Размерность группы Ли — это её размерность как многообразия.

Группа G инвариантна относительно левых сдвигов. Из этого следует, что в окрестности каждой своей точки она (как многообразие) устроена “одинаково”. Так, например, если мы хотим доказать, что матричная группа есть группа Ли, то проверять условие гладкости можно только в одной точке — обычно удобнее всего делать это в единице.

Пример 11.4. $\mathrm{GL}_n(K)$ выделяется в $\mathrm{Mat}_n(K)$ условием $\det g \neq 0$. Это условие задаёт открытое множество, поэтому $\mathrm{GL}_n(K)$ — группа Ли размерности n^2.

Пример 11.5. $\mathrm{SL}_n(K) = \{g \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid \det g = 1\}$. Проверим, что $\mathrm{SL}_n(K)$ есть многообразие. Для этого найдём размерность его касательного пространства в единице. Несложно проверить (проделайте это!), что $d_E(\det g - 1) = \operatorname{tr} dg$. Поэтому $T_E\,\mathrm{SL}_n(K)$ задаётся условием $\operatorname{tr} dg = 0$, то есть состоит из матриц со следом нуль. Это (n^2-1)-мерное векторное пространство, поэтому $\mathrm{SL}_n(K)$ является группой Ли размерности $n^2 - 1$.

Далее докажем, что $\mathrm{O}_n(K)$ есть группа Ли. Для этого можно было бы выписать систему из $n(n+1)/2$ уравнений, задающих группу $\mathrm{O}_n(K)$, вычислить матрицу частных производных к этой системе и доказать, что она имеет полный ранг. Однако можно сделать это иначе, если работать с матричнозначными функциями многих переменных.

Пусть $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ — гладкая матричнозначная функция n переменных (гладкость означает то, что матричные элементы являются гладкими функциями от x_i. Тогда имеет смысл понятие частных производных $\partial\Phi/\partial x_i$. Определим полный дифференциал функции Φ по формуле

$$d\Phi = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i.$$

Упражнение 11.6. Докажите, что полный дифференциал линеен и удовлетворяет тождеству Лейбница (некоммутативному!):

$$d(\Phi + \Psi) = d\Phi + d\Psi; \qquad d(\Phi\Psi) = (d\Phi)\Psi + \Phi(d\Psi).$$

Пример 11.7. Докажем, что $\mathrm{O}_n(K)$ — группа Ли. Она задаётся матричным уравнением $gg^t - E = 0$. Продифференцируем это уравнение, получим: $g \cdot dg^t + dg \cdot g^t = 0$. Подставив $g = E$, получаем линейное матричное уравнение $dg + dg^t = 0$. Пространство его решений $T_E \mathrm{O}_n$— это пространство кососимметрических матриц, которое имеет размерность $n(n-1)/2$.

Пример 11.8. Аналогичным образом группа U_n задаётся уравнением $gg^* = E$. Её касательное пространство есть пространство *косоэрмитовых* матриц, т.е. матриц, удовлетворяющих условию $dg = -dg^*$. Это *вещественное* (но не комплексное!) подпространство размерности n^2 в ($2n^2$-мерном вещественном) пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Итак, группа U_n является *вещественным* (но не комплексным) подмногообразием в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$.

Пример 11.9. Группа U_1 — это единичная окружность, т.е. подгруппа комплексных чисел модуля 1 в $\mathbb{C}^*$.

Пример 11.10. $\mathrm{SU}_n = \mathrm{U}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ есть $n^2 - 1$-мерная вещественная группа Ли; её касательное пространство есть пространство косоэрмитовых матриц со следом 0.

Упражнение 11.11. Докажите, что группа $B_n(K)$ невырожденных верхнетреугольных матриц является группой Ли, и опишите касательное пространство $T_E B_n(K)$

Определение 11.12. *Представление* группы Ли G в пространстве V — это гомоморфизм групп $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(V)$, одновременно являющийся гладким отображением многообразий.

11.3. **Компактные группы.**

Определение 11.13. Группа Ли называется *компактной*, если она компактна как гладкое многообразие.

Замечание 11.14. Всякая группа Ли замкнута в $\mathrm{GL}_n(K)$ (докажите это!), поэтому компактность группы эквивалентна её ограниченности (в какой-либо норме в пространстве $\mathrm{Mat}_n(K)$).

Пример 11.15. Всякая конечная подгруппа в $\mathrm{GL}_n(K)$ является компактной группой Ли.

Упражнение 11.16. Докажите, что группы $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, U_n, SU_n компактны, а $\mathrm{GL}_n(K)$ и $\mathrm{SL}_n(K)$ — нет.

Компактные группы во многих отношениях очень похожи на конечные. В частности, их конечномерные представления вполне приводимы — а для некомпактных групп это бывает неверно.

Упражнение 11.17. Придумайте представление группы $B_n(K)$, не являющееся вполне приводимым.

Доказать полную приводимость легко, если уметь интегрировать по группе, т.е. если на группе существует *вероятностная мера* μ_G, инвариантная относительно левых сдвигов. Слово "вероятностная" значит, что объём всей группы относительно этой меры равен единице: $\int_G d\mu_G = 1$.

Можно доказать, что такая мера (она называется *мерой Хаара*) существует и единственна на любой компактной группе.

Пример 11.18. Меры Хаара на группах $\mathrm{U}_1 \cong S^1$ и $\mathrm{SU}_2 \cong S^3$ индуцируются обычной лебеговской мерой на плоскости и в четырехмерном пространстве соответственно. Они инвариантны относительно действия этих групп на себе левыми сдвигами (т.е. вращений окружности и трёхмерной сферы).

Предложение 11.19. *Пусть G — компактная группа Ли, на которой задана мера Хаара μ_G. Тогда на каждом вещественном/комплексном представлении V группы Ли G имеется G-инвариантное положительно определённое/эрмитово скалярное произведение.*

Доказательство. Оно ничем не отличается от случая конечных групп.

Пусть $(\,,\,)$ — произвольное положительно определённое/эрмитово скалярное произведение на V. Построим новое скалярное произведение $(\,,\,)_G$, усреднив по группе:

$$(v, w)_G = \int_G (gv, gw) d\mu_G.$$

Оно, очевидно, будет G-инвариантно. □

Следствие 11.20 (Теорема Машке)**.** *Всякое конечномерное представление компактной группы Ли G вполне приводимо.*

Доказательство. Дословно повторяет первое доказательство теоремы Машке для конечных групп. □

В следующей лекции мы получим другое доказательство теоремы Машке для компактных групп Ли, не предполагающее известным наличие меры Хаара. В нём вместо этого будут использоваться методы выпуклой геометрии.

12. Двенадцатая лекция, 4 декабря 2012 г.

Мы начнём с того, что изложим доказательство полной приводимости представлений компактных групп Ли, не использующее наличие на группе меры Хаара. Для этого нам придётся вспомнить некоторые понятия выпуклой геометрии.

12.1. **Центр масс.** Предположим, что $M \subset \mathbb{A}^n$ — ограниченное множество ненулевой лебеговской меры в n-мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$. Из школьного курса физики известно определение его центра масс:

$$\operatorname{cent} M = \frac{1}{\mu(M)} \int_M x d\mu.$$

(оно получается переходом к пределу из определения центра масс системы k материальных точек: $\operatorname{cent}(p_1, \dots, p_n) = (\sum r_i)/n$, где r_i — радиус-векторы этих материальных точек).

Из определения центра масс следует, что для любого аффинного преобразования $\alpha\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$

$$\operatorname{cent} \alpha M = \alpha(\operatorname{cent} M)$$

В частности, если преобразование α переводит множество M в себя ($\alpha(M) = M$), то оно сохраняет и его центр масс: $\alpha(\operatorname{cent} M) = \operatorname{cent} \alpha(M)$.

12.2. **Выпуклые множества.** Напомним, что подмножество $M \subset \mathbb{A}^n$ называется *выпуклым*, если для любых его точек $x, y \in M$ и для любого числа $\lambda \in [0, 1]$ точка $\lambda x + (1 - \lambda) y$ также принадлежит M. Иначе говоря, если выпуклое множество содержит концы отрезка, то оно содержит и весь отрезок.

Предположим, что M — ограниченное выпуклое множество, не лежащее ни в каком собственном аффинном подпространстве $\mathbb{A}^n$. Тогда M имеет ненулевую меру (почему?), и мы можем найти его центр масс. Ясно, что $\operatorname{cent} M \subset \overline{M}$.

Несложно доказать более сильное утверждение: $\operatorname{cent} M$ принадлежит *внутренности* множества M. Действительно, пусть f — некоторый аффинный линейный функционал. Предположим, что $f(x) \geq 0$ для любого $x \in M$, то есть M лежит в замкнутом полупространстве, в котором $f \geq 0$. При этом найдётся такая точка из M, в которой функционал f строго положителен. Докажем, что $\operatorname{cent} M$ лежит в соответствующем открытом полупространстве, т.е. $f(\operatorname{cent} M) > 0$. Действительно,

$$f(\operatorname{cent} M) = \mu(M)^{-1} \int_M f(x) d\mu(x) > 0,$$

поскольку интеграл от неотрицательной непрерывной функции, принимающей в какой-то точке строго положительное значение, также строго положителен.

Лемма 12.1 (о неподвижной точке)**.** *Пусть G —* компактная *группа аффинных преобразований пространства $\mathbb{A}^n$, $M \subset \mathbb{A}^n$ — непустое выпуклое множество, инвариантное относительно G. Тогда G имеет в M неподвижную точку (т.е. найдётся такая точка $x \in M$, что $gx = x$ для любого $g \in G$).*

Доказательство. Пусть $p \in M$ — произвольная точка. Рассмотрим её орбиту Gp и возьмём её выпуклую оболочку $M' = \mathrm{Conv}(Gp)$. Это выпуклое множество, которое будет ограниченным, т.к. Gp ограничено (образ компакта при непрерывном отображении — компакт, поэтому всякая орбита компактной группы компактна, а следовательно, ограничена). Оно также инвариантно относительно действия группы G. Рассмотрим центр масс множества M' (как подмножества своей аффинной оболочки). В силу предыдущего обсуждения, он будет инвариантен относительно G. Поэтому он и будет искомой неподвижной точкой. □

Лемма о неподвижной точке позволяет дать другое доказательство предложения 11.19.

Предложение 12.2. *Пусть G — компактная группа Ли. Тогда на каждом вещественном/комплексном представлении V группы Ли G имеется G-инвариантное положительно определённое/эрмитово скалярное произведение.*

Доказательство. Приведём доказательство для вещественного случая. Рассмотрим пространство $\mathrm{Sym}^2 V^*$ симметрических билинейных форм на V. Это векторное пространство, размерность которого равна $\dim V(\dim V + 1)/2$. В нём есть подмножество положительно определённых форм, которое мы обозначим через P. Это выпуклый конус: действительно, линейная комбинация любых двух положительно определённых форм с положительными коэффициентами снова будет положительно определённой формой. В частности, это верно для выпуклых комбинаций (с коэффициентами λ и $1 - \lambda$, где $\lambda \in [0, 1]$.

Группа G действует на пространстве всех симметрических билинейных форм (как на симметрическом квадрате сопряжённого пространства). Это действие есть не что иное, как действие на аргументе: $g(\beta(v, w)) = \beta(gv, gw)$. При этом действии положительно определённые формы переходят в положительно определённые, поэтому множество P будет G-инвариантно. Стало быть, согласно лемме о неподвижной точке, в P найдётся форма, инвариантная относительно G. □

12.3. **Характеры представлений компактных групп Ли и теорема Петера–Вейля.** В этом разделе мы снова предполагаем, что на нашей компактной группе G определена мера Хаара μ_G.

Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — комплексное представление компактной группы Ли G, размерность которого равна n. Выберем в V базис; тогда элемент $\rho(g)$ будет записываться матрицей $(\rho^V_{ij}(g))$. Матричные элементы $\rho^V_{ij}(g)$ — это гладкие функции на группе G. Как и в случае конечной группы, можно определить *характер* представления V:

$$\chi_V(g) = \sum_{i=1}^{n} \rho^V_{ii}(g) = \operatorname{tr} \rho(g) \in C^\infty(G),$$

где $C^{infty}(G)$ — пространство всех гладких комплекснозначных функций на G.

Предложение 12.3 (об ортогональности характеров)**.** *Пусть V и W — неприводимые конечномерные представления компактной группы Ли G. Тогда*

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle := \int_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) d\mu_G = \begin{cases} 1, & V \cong W; \\ 0, & V \ncong W \end{cases}$$

Доказательство. Это следует из теоремы Машке и леммы Шура аналогично случаю конечной группы. □

В пространстве функций на группе $C^\infty(G)$ можно ввести метрику (и индуцированную ей топологию) — например, C^1-метрику. Расстояние между двумя функциями $f_1(g)$ и $f_2(g)$ в этой метрике будет определяться так:

$$||f_1(g) - f_2(g)|| = \max_{g\in G} |f_1(g) - f_2(g)|.$$

(поскольку группа компактна, супремум всегда является максимумом).

Пространство $C^\infty(G)$ само является представлением группы Ли G (группа умеет действовать на функциях на себе при помощи замен аргумента). О нём можно думать как о регулярном представлении группы. Однако, в отличие от случая конечной группы, это представление бесконечномерно, и для работы с ним приходится привлекать аналитические методы. Имеет место следующий фундаментальный результат, который является аналогом теоремы о разложении представления в прямую сумму неприводимых. Он принадлежит немецкому математику Герману Вейлю и его ученику Фрицу Петеру.

Теорема 12.4 (Петер–Вейль)**.** *Линейная оболочка пространства матричных элементов неприводимых представлений $\rho^V_{ij}(g)$ плотна в пространстве функций на группе $C^\infty(G)$ относительно C^1-метрики.*

Иногда удобно вместо пространства $C^\infty(G)$ рассматривать пространство $L^2(G)$ функций, интегрируемых с квадратом, с L_2-метрикой.

12.4. **Представления одномерного тора и ряды Фурье.** Пусть $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ — группа комплексных чисел единичного модуля. Это вещественная одномерная компактная группа Ли. Опишем все её неприводимые представления.

Во-первых, эта группа абелева, поэтому всякое её неприводимое представление одномерно.

Далее, ясно, что всякий гомоморфизм групп $T \to \mathrm{GL}(1) = \mathbb{C}^*$ является просто возведением в некоторую степень:

$$\rho_n \colon z \to z^n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Выясним, что в данном случае утверждает теорема Петера–Вейля. Во-первых, пространство $C^\infty(T)$ есть пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на окружности от переменной z, т.е. 2π-периодических функций на прямой $f(z) = f(e^{it})$.

Далее, все неприводимые представления T одномерны, поэтому каждому представлению соответствует единственный матричный элемент, который одновременно является его характером:

$$\chi_n(t) = e^{int}.$$

Условие ортогональности характеров — это равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e^{int}} e^{imt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = \delta_{n,m}.$$

($\delta_{n,m}$ — это символ Кронекера; множитель $1/2\pi$ появляется оттого, что мера всей окружности равна единице).

Теорема Петера–Вейля утверждает, что линейная оболочка функций вида e^{int} плотна в пространстве всех гладких функций на окружности. Иначе говоря, каждая 2π-периодическая гладкая функция $f(t)$ является суммой некоторого ряда вида

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}.$$

Поскольку система $\{e^{int}\}$ является ортонормированной, коэффициенты разложения функции f по векторам системы равны скалярным произведениям $\langle f, \chi_n \rangle$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt.$$

Мы получили хорошо известное утверждение из курса анализа: каждая гладкая (и даже непрерывная) функция сходится к своему *ряду Фурье*. Коэффициенты c_n называются *коэффициентами Фурье* функции $f(t)$.

13. Последняя, тринадцатая лекция, 11 декабря 2012 г.

В этой лекции мы изучим представления группы SU(2).

Напомним, что SU(2) — это группа унитарных матриц 2×2 с определителем 1, которую также можно отождествить с группой (мультипликативной) кватернионов единичного модуля:

$$\mathrm{SU}(2) \cong \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\} = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid AA^* = E, \det A = 1\}.$$

Топологически SU(2) — это трёхмерная сфера в $\mathbb{R}^4$.

13.1. Максимальный тор. Рассмотрим в SU(2) *максимальный тор* — подгруппу диагональных матриц $T = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$, где $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. На кватернионном языке $T = \{\cos t + i \sin t\}$.

Предложение 13.1. (1) *Всякий элемент из* SU(2) *сопряжён некоторому элементу из T;*
(2) *Два элемента из T сопряжены при помощи некоторого элемента из* SU(2) *тогда и только тогда, когда они взаимно обратны.*

Доказательство. 1. Любой кватернион единичного модуля представим в виде $q = \cos\theta + v \sin\theta$, где $v \in \mathrm{Im}$, $|v| = 1$ — чисто мнимый кватернион. Существует такое сопряжение, которое переводит v в i. Оно и переводит элемент q в $\cos\theta + v\sin\theta \in T$.

2. Сопряжение, переводящее $q = \cos t + i \sin t$ в элемент из T, обязано переводить i либо в i, либо в $-i$. В первом случае оно тривиально, во втором — переводит q в $\overline{q} = q^{-1}$. □

13.2. Серия представлений SU(2). В этом разделе мы построим серию неприводимых конечномерных комплексных представлений группы SU(2), которые будут нумероваться целыми положительными числами. Впоследствии мы докажем, что все неприводимые представления исчерпываются этим списком.

SU(2) естественным образом действует на линейных формах от двух переменных x, y:

$$g(x, y) = (ax + cy, bx + dy), \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Это действие индуцирует действие SU(2) на однородных формах степени n от двух переменных.

$$g \circ f(x, y) = f(ax + cy, bx + dy).$$

Обозначим пространство однородных форм степени n через V_n. Ясно, что $\dim V_n = n+1$, т.к. $V_n = \langle x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \ldots, xy^{n-1}, y^n \rangle$.

Определение 13.2. Вектор $v \in V_n$ называется *весовым*, если он является собственным для всех элементов $h(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \in T$.

Его собственное значение называется *весом* вектора v. Число n называется *старшим весом* представления V_n.

Проверим, что вектор $x^{n-m}y^m$ является весовым, и его вес равен z^{n-2m}. Действительно,

$$h(z)(x^{n-m}y^m) = z^{n-m}x^{n-m}z^{-m}y^m = z^{n-2m}(x^{n-m}y^m).$$

Таким образом, если ограничить представление V_n на тор T, то V_n распадётся в прямую сумму $n+1$ попарно неизоморфного одномерного представления, которые будут натянуты на векторы $x^{n-m}y^m$. Веса этих векторов равны $z^n, z^{n-2}, \dots, z^{-n}$.

Предложение 13.3. *Представление V_n неприводимо.*

Доказательство. Пусть $U \subset V_n$ — ненулевое подпредставление. Тогда U, в частности, является T-инвариантным подпространством. Значит, U натянуто на какие-то из весовых векторов $x^{n-m}y^m$. Рассмотрим какой-нибудь весовой вектор $x^{n-m}y^m$ и подействуем на него элементом “общего положения” из $\mathrm{SU}(2)$ (не диагональным и не антидиагональным). Получим элемент $(ax+cy)^{n-m}(bx+dy)^m$. В частности, в эту сумму входит x^n с каким-то ненулевым коэффициентом. Поэтому $x^n \in U$. Теперь подействуем на x^n тем же элементом — получим $(ax+cy)^n$. В эту сумму уже входят с ненулевыми коэффициентами все весовые векторы. Значит, U совпадает со всем V_n. □

Нашей следующей целью будет доказательство того, что других неприводимых представлений у $\mathrm{SU}(2)$ нет.

13.3. **Снова характеры.** Пусть $\rho\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V)$ — представление $\mathrm{SU}(2)$, $\chi_V(g) = \operatorname{tr}\rho(g)$ — его характер. Это функция на $\mathrm{SU}(2)$.

Определение 13.4. Характером $\mathrm{ch}_V(z)$ представления V называется ограничение $\chi_V(g)$ на максимальный тор:

$$\mathrm{ch}_V(z) = \chi_V(h(z)).$$

Выберем в V базис из весовых векторов. Из определения следует, что $\mathrm{ch}_V(z)$ является суммой их весов (как мономов от z и z^{-1}).

Пример 13.5. Вычислим $\mathrm{ch}_{V_n}(z)$. В представлении V_n можно выбрать базис из весовых векторов с весами $z^n, z^{n-2}, \dots, z^{-n}$. Поэтому

$$\mathrm{ch}_{V_n}(z) = z^n + z^{n-2} + \dots + z^{-n+2} + z^{-n} = \frac{z^{n+1} - z^{-n-1}}{z - z^{-1}}.$$

(последнее равенство — это формула для суммы геометрической прогрессии).

Предложение 13.6. *Для любого представления V группы* $\mathrm{SU}(2)$

(1) $\mathrm{ch}_V(z) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[z, z^{-1}]$*;*

(2) $\mathrm{ch}_V(z) = \mathrm{ch}_V(z^{-1})$ *(характер является* возвратным *многочленом, т.е. симметричным относительно замены z на z^{-1});*

(3) *По* $\mathrm{ch}_V(z)$ *однозначно восстанавливается* $\chi_V(g)$ *(а значит, характер* $\mathrm{ch}_V(z)$ *однозначно определяет представление).*

Доказательство. 1. Коэффициент при z^k в $\mathrm{ch}_V(z)$ есть кратность собственного значения z^k элемента $h(z)$, т.е. целое неотрицательное число.

2. Это следует из того, что характер $\chi_V(g)$ постоянен на классах сопряжённости. Элементы $h(z)$ и $h(z^{-1})$ из T сопряжены в $\mathrm{SU}(2)$, поэтому характер χ_V принимает в них равные значения: $\chi_V(h(z)) = \chi_V(h(z^{-1}))$. А это и значит, что $\mathrm{ch}_V(z) = \mathrm{ch}_V(z^{-1})$.

3. Всякий элемент $g \in \mathrm{SU}(2)$ сопряжён некоторому элементу из максимального тора $h(z) \in T$, поэтому $\chi_V(g)$ полностью восстанавливается по значениям $\chi_V(h(z)) = \mathrm{ch}_V(z)$. $\square$

Полезно отметить, что ch_V обладает теми же свойствами, что и “обычный” характер $\chi_V(g)$:

Предложение 13.7. *Пусть V и W — представления* $\mathrm{SU}(2)$*. Тогда* $\mathrm{ch}_{V\oplus W}(z) = \mathrm{ch}_V(z) + \mathrm{ch}_W(z)$*,* $\mathrm{ch}_{V\otimes W}(z) = \mathrm{ch}_V(z)\,\mathrm{ch}_W(z)$*.*

Доказательство. ch_V есть ограничение характера $\chi_V(g)$, для которого эти свойства имеют место. $\square$

Теорема 13.8. *Представления V_n, $n \geq 0$, составляют полный список неприводимых представлений* $\mathrm{SU}(2)$*.*

Доказательство. Характеры $\mathrm{ch}_{V_n}(z)$ образуют *базис* в пространстве возвратных лорановских многочленов от z (над каким-нибудь полем — например, с рациональными коэффициентами). Поскольку характер $\chi_V(g)$ однозначно восстанавливается по $\mathrm{ch}_V(z)$, то функции $\chi_{V_n}(g)$ тоже образуют базис, т.е. полную линейно независимую систему векторов, в пространстве *центральных* функций на $\mathrm{SU}(2)$ (т.е. функций, постоянных на классах сопряжённости). Кроме того, мы знаем, что характеры неизоморфных представлений ортогональны, поэтому этот базис ещё и ортонормированный (а для базиса из $\mathrm{ch}_{V_n}(z)$ это, кстати, неверно — подумайте, почему).

Поэтому для характера произвольного представления W имеет место равенство (в пространстве центральных функций на $\mathrm{SU}(2)$)

$$\chi_W(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \chi_W, \chi_{V_n} \rangle \chi_{V_n}(g).$$

Если W конечномерно, то и эта сумма тоже конечна (почти все слагаемые в ней равны нулю), и поэтому $W = a_0V_0 \oplus a_1V_1 \oplus \cdots \oplus$

$a_n V_n$. Получается, что всякое конечномерное представление является суммой представлений вида V_n, что и требовалось. $\square$

13.4. **Теорема Клебша–Гордана.** Теория характеров $\mathrm{SU}(2)$ позволяет разложить на неприводимые тензорное произведение двух неприводимых представлений V_n и V_m группы $\mathrm{SU}(2)$. Пусть $n \leq m$. Запишем характеры этих представлений так:

$$\operatorname{ch}_{V_n}(z) = z^n + z^{n-2} + \dots + z^{-n}; \qquad \operatorname{ch}_{V_m}(z) = \frac{z^{m+1} - z^{-m-1}}{z - z^{-1}}.$$

Перемножим эти два многочлена Лорана:

$$\operatorname{ch}_{V_n}(z)\operatorname{ch}_{V_m}(z) = (z^n + z^{n-2} + \dots + z^{-n})\frac{z^{m+1} - z^{-m-1}}{z - z^{-1}} =$$
$$= \frac{1}{z - z^{-1}}\left(z^{n+m+1} + z^{n+m-1} + \dots + +z^{-n+m+1} + z^{n-m-1} + \dots + \right.$$
$$\left. + z^{-n-m+1} + z^{-n-m-1}\right) =$$
$$= \frac{z^{n+m+1} - z^{-n-m-1}}{z - z^{-1}} + \frac{z^{n+m-1} - z^{-n-m+1}}{z - z^{-1}} + \dots + \frac{z^{m-n+1} - z^{-m+n-1}}{z - z^{-1}} =$$
$$= \operatorname{ch}_{V_{n+m}}(z) + \operatorname{ch}_{V_{n+m-2}}(z) + \dots + \operatorname{ch}_{V_{m-n}}(z).$$

Мы получили следующий результат.

Теорема 13.9 (Клебш–Гордан)**.**

$$V_n \otimes V_m \cong V_{n+m} \oplus V_{n+m-2} \oplus \dots \oplus V_{|n-m|}.$$

E-mail address: evgeny.smirnov@gmail.com