

Прикладные методы анализа. Материалы к экзамену

I Экзаменационные вопросы

1. Лемма Жордана. Доказательство. Применения.
2. Преобразование Лапласа. Определение. Применение преобразования Лапласа к решению задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем
3. Предельные соотношения для оригиналов и изображений преобразования Лапласа
4. Обращение преобразования Лапласа
5. Достаточные условия для формулы обращения преобразования Лапласа.
6. Основные свойства преобразования Лапласа
7. Свертка функций. Преобразование Лапласа свертки функций. Преобразование Лапласа произведения функций.
8. Интеграл Дюамеля. Применение интеграла Дюамеля для решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений.
9. Понятие функции Грина. Функция Грина задачи Коши линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения. Пример уравнений 1 и 2 порядка. Связь с формулой Дюамеля.
10. Граничные (краевые) задачи обыкновенных дифференциальных уравнений и их функции Грина
11. Обобщенные функции. Пространства \mathcal{D} и \mathcal{S} основных функций, пространства обобщенных функций, топология и сходимости, примеры обобщенных функций.
12. Локальные свойства обобщенных функций. Локально интегрируемые функции. Обобщенные функции $1/x$, $1/(x \pm i0)$, $\eta(x)$, $\delta(x)$.
13. Регуляризация несобственных интегралов. Примеры
14. Сходимость обобщенных функций и δ -образные последовательности
15. Предельные значения голоморфных функций. Формулы Сохоцкого
16. Прямое произведение обобщенных функций и свертка
17. Операции над обобщенными функциями. Взятие производной и умножение на мультипликатор. Линейные замены переменных. Примеры
18. Производная обобщенной функции. Производная разрывной функции. Производная $\log|x|$ и $1/x$.
19. Преобразование Фурье обобщенных функций. Преобразование Фурье от $1/x$, $\delta(x)$, $1/(x \pm i0)$.
20. Свойства преобразования Фурье. Применение преобразования Фурье.
21. Обобщенные функции комплексного переменного. Обобщенные функции $\delta(z)$, $\log|z|$, $1/z^n$.
22. Операторы $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial \bar{z}$. Фундаментальное решение оператора $\partial/\partial \bar{z}$. Фундаментальное решение оператора Лапласа.
23. Сведение задачи Коши линейного дифференциального уравнения к задаче с нулевыми начальными данными
24. Построение фундаментальных решений линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами методом преобразования Фурье
25. Фундаментальные решения волнового оператора. Вывод формулы Пуассона для решения задачи Коши.

26. Фундаментальные решения оператора теплопроводности.
27. Аналитическое представление обобщенных функций. Примеры. Соотношение между преобразованиями Фурье и Лапласа.
28. Сведение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения к интегральному уравнению. Применение к спектральной задаче оператора Штурма-Лиувилля
29. Асимптотические последовательности и асимптотические разложения. Определения. Примеры. Возможные обобщения
30. Приближенное нахождение нулей трансцендентных уравнений
31. Оценка интеграла интегрированием по частям. Асимптотическое разложение интеграла вероятности $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$
32. Асимптотика интеграла Лапласа. Лемма Ватсона.
33. Асимптотическое разложение интегралов гауссова типа
34. Метод перевала. Вещественная версия.
35. Формула Стирлинга для $\Gamma(z)$
36. Асимптотики интегралов Фурье. Лемма Римана-Лебега. Асимптотическое разложение интегралов Фурье.
37. Метод стационарной фазы. Асимптотическое разложение функции Эйри отрицательного аргумента
38. Метод перевала (комплексная версия). Асимптотическое разложение функции Эйри положительного аргумента
39. Формула Эйлера-Маклорена.
40. Асимптотическое разложение $\log \Gamma(z)$.

II Задачи к экзамену

1. Показать, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(x - k)$$

сходится в пространствах \mathcal{D} и \mathcal{S} для любых $a_k \in \mathbb{C}$

2. Последовательность $f_n \in \mathcal{D}$ обобщенных функций сходится к обобщенной функции f . Докажите, что последовательность f'_n также сходится; последовательность $g(x)f_n$ сходится, если $g(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$.

3. Пусть $a(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ - гладкая финитная функция, такая, что $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx = 1$. Покажите, что

$$\varepsilon^{-n} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow \delta(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

4. Найдите преобразование Фурье $F[(x^2 + a^2)^{-1}]$, $a^2 > 0$.
5. Вычислите преобразование Фурье обобщенных функций $F[x]$, $F[\eta(x)x]$, $F[|x|]$.
6. Докажите равенство

$$a(x)\delta'(x) = -a'(0)\delta(x) + a(0)\delta'(x), \quad a \in C^1(\mathbb{R})$$

7. Напишите закон движения колебания маятника под действием вынуждающей силы $F(t)$,

$$x'' + x = F(t)$$

считая, что в начальном момент маятник покоится в положении равновесия.

8. Решите краевую задачу $x'' - x = f(t)$, $x(0) = x(1) = 0$. Выпишите соответствующую функцию Грина.
9. Вычислите e^{tA} , где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с помощью преобразования Лапласа.
10. Найдите решение задачи Коши: $x'' + 2x' = \varphi(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, где $\varphi(t) = e^{-t}$ при $0 < t < 1$ и $\varphi(t) = 0$ при $t > 1$.
11. Найдите асимптотическое разложение интеграла $\int_0^\infty (\operatorname{arctg} t)e^{-zt} dt$ при больших z . В какой области параметра z справедливо полученное разложение?
12. Найдите а) первый член б) первые два члена асимптотического разложения интеграла $\int_{-\infty}^\infty (t^2 + 1)e^{-zt} dt$. В какой области параметра z справедливо полученное разложение?
13. Перепишите задачу Коши $x'' + tx' + x = f(t)$, $x(0) = a$, $x'(0) = b$ в виде уравнения на обобщенную функцию с сингулярной правой частью.
14. Вычислите $(\sin |x| + |\cos x|)''$ в смысле обобщенных функций.
15. Пусть $F(t, s)$ - функция Грина задачи Коши $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ с нулевыми начальными условиями, $x(0) = x'(0) = 0$. Покажите, что $F(t, s) + x_1 F(t, 0) + x_0 F'_s(t, 0)$ есть функция Грина задачи Коши $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.
16. Пусть $F(t)$ - фундаментальное решение линейного дифференциального оператора $L = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0$, равное нулю при отрицательных t . Покажите, что функция $G(t, s) = F(t - s)$ есть функция Грина задачи Коши $Lx = 0$, $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$.
17. Покажите, что при произвольных постоянных C_1 и C_2 функция $u(x) = C_1 + C_2 \eta(x) + \log |x|$ является решением уравнения $xu'(x) = 1$ в обобщенных функциях (т.е., $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$). Докажите, что это все решения уравнения $xu'(x) = 1$.
18. Докажите, воспользовавшись формулой Эйлера–Маклорена, что
- $$\sum_{n=1}^N n^k = \frac{N^{k+1}}{k+1} + \frac{N^k}{2} + \frac{1}{k+1} \sum_{s=2}^k B_s C_{k+1}^s N^{k+1-s}$$
19. Найти главный член асимптотики функции $F(\lambda) = \int_0^\pi x e^{i\lambda \sin x} dx$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$.
20. Пусть χ - характеристическая функция круга $|z| \leq 1$. Докажите, что производная $\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}$ есть обобщенная функция на плоскости, ставящая в соответствие каждой основной функции $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ интеграл $\frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \varphi(z) dz$.
21. Найдите все возможные регуляризации интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) dx}{|x|^{3/2}}$.

III Литература

1. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного
2. В.С.Владимиров Уравнения математической физики.
3. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов, Обобщенные функции и действия над ними
4. Бремерман, Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье.
5. А.Эрдейи, Асимптотические разложения,
6. Е.Копсон, Асимптотические разложения,
7. Ф.Олвер, Асимптотика и специальные функции,