А. К. Погребков, С. М. Хорошкин

Прикладные методы анализа

Высшая школа экономики
1-й семестр 2012/2013 гг.

Содержание

1. Лекция 1. Преобразование Лапласа

1.1. **Введение.** Оливер Хевисайд (англ. Oliver Heaviside, 18 мая, 1850 – 3 февраля, 1925) – английский ученый-самоучка, инженер, математик и физик. Впервые применил комплексные числа для изучения электрических цепей, разработал технику применения преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений, переформулировал уравнения Максвелла в терминах трехмерных векторов, напряженностей электрического и магнитного полей и электрической и магнитной индукций, и, независимо от других математиков, создал векторный анализ. Несмотря на то, что Хевисайд большую часть жизни был не в ладах с научным сообществом, его работы изменили облик математики и физики. В 1874 году он оставляет должность телеграфиста и занимается исследованиями частным порядком в доме своих родителей. В это время он разработал теорию линий передачи (также известную как “телеграфные уравнения”). Хевисайд математически доказал, что равномерно распределённая ёмкость телеграфной линии минимизирует одновременно затухание и искажение сигнала. Между 1880 и 1887 годами Оливер Хевисайд разрабатывал операционное исчисление (он ввёл обозначение D для дифференциального оператора), метод решения дифференциальных уравнений с помощью сведения к обыкновенным алгебраическим уравнениям, который поначалу вызвал бурную полемику из-за отсутствия строгого обоснования. Тогда он произнёс известную фразу: “Математика есть наука экспериментальная, определения появляются последними”. Это было ответом на критику за использование ещё не вполне определённых операторов. Функция Хевисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \tag{1.1}$$

дает простейший пример обобщенной функции (неустранимый разрыв первого рода пти $t = 0$).

Операционное исчисление ≡ Операционный метод ≡ Символическое исчисление

Набор формальных операций над символом $p = \dfrac{d}{dt}$, где t – независимая переменная.

$$\begin{aligned}
&x = x(t) \\
&x^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^n x, \qquad n = 0, 1, \dots, \\
&Lx = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x \Leftrightarrow L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n \\
&\int_0^1 dt\, x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p} \cdot x
\end{aligned}$$

Область применения: решение начальных (краевых) задач для линеных дифференциальных (интегральных) уравнений.

Пример 1.1. *Решить начальную задачу:*

$$x' - x = 1, \qquad x(0) = 0.$$

Решение. $px - x = 1, \Rightarrow$

$$x = \frac{1}{p-1} \cdot 1 \equiv \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p}} \cdot 1$$

формально разлагаем в ряд:

$$x = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n} + \dots \right) \cdot 1$$

$$\frac{1}{p} \cdot 1 = \int_0^t dt = t, \qquad \frac{1}{p^2} \cdot 1 \equiv \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} \cdot 1 = \int_0^t t\, dt = \frac{t^2}{2}, \textit{ и т.д.}$$

так что

$$x(t) = t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots = e^t - 1,$$

что легко проверить и непосредственно.

Обоснование символического (операционного) метода дано Бромвичем и Карсоном в 20-ые годы XX-го столетия. Они связали этот метод с методом интегральных пробразований, точнее преобразования Лапласа (французский математик, физик, астроном, 1749–1827). При этом p оказывается комплексным числом $p = p_{\mathrm{Re}} + ip_{\mathrm{Im}}$.

Схема операционного метода. Требуется найти функцию $x(t)$ действительного переменного t из некоторого уравнения, содержащего производные и интегралы от нее.

1. Переходим к образу $X(p)$.
2. Уравнение на x переходит в алгебраическое уравнение на X.
3. Решаем это уравнение, находим $X(p)$
4. Переходим к оригиналу $x(t)$.

(аналогия с логарифмированием)

1.2. **Основные понятия и методы.**

Определение 1.1. ***Оригиналом*** *называется любая комплексная функция $f(t)$ вещественного аргумента t, удовлетворяющая условиям:*

(1) *$f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера всюду, кроме отдельных изолированных точек, где она имеет разрывы 1 рода (причем на каждом конечном интервале таких точек – конечное число), т.е., для каждого t, кроме указанных изолированных точек, найдутся такие положительные константы A, $a \le 1$ и h_0, что выполнено*
$$|f(t+h) - f(t)| < A|h|^a$$
для всех h, $|h| < h_0$, где A, вообще говоря, может зависеть от t;

(2) *$f(t) = 0$ при $t < 0$;*

(3) *$f(t)$ растет не быстрее некоторой экспоненты, т.е., $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ для некоторого $M > 0$ и вещественного s_0, называемого показателем роста $f(t)$ (точнее, $\inf$).*

Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3, то $f(t) = \eta(t)\varphi(t)$ удовлетворяет всем трем условиям.

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется функция комплексного переменного p (изображение)

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{1.2}$$

Функция $\eta(t)$ – простейший пример оригинала (часто называется единичной функцией). Вообще ее часто опускают, всегда в этом методе подразумевая выполнение условия 2.

Определение 1.2. *Изображением функции $f(t)$ (по Лапласу) называют функцию комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемую соотношением (1.2). Фраза "функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$" записывается как $f(t) \risingdotseq F(p)$ или $F(p) \risingdotseq f(t)$.*

(Преобразование Хевисайда содержит лишний множитель p.)

Теорема 1.1. *Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$, и является в этой полуплоскости аналитической функцией p.*

Доказательство следует из оценки по свойству 3:
$$\left| \int_0^\infty dt\, f(t)e^{-pt} \right| \le M \int_0^\infty dt\, e^{-(s-s_0)t} = \frac{M}{s-s_0},$$
так что в указанной области интеграл абсолютно сходится. Кроме того в любой полуплоскости $\mathrm{Re}\, p \ge s_1 > s_0$
$$\left| \int_0^\infty dt\, tf(t)e^{-pt} \right| \le M \int_0^\infty dt\, te^{-(s-s_0)t} = \frac{M}{(s_1-s_0)^2}.$$

Поэтому в любой полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$ интеграл, получающийся дифференцированием по p, сходится равномерно, ибо он также мажорируется сходящимся интегралом, не зависящим от p. Итак, функция $F(p)$ в любой точке полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$ обладает производной. Часто мы будем рассматривать аналитическое продолжение изображений за прямую $\mathrm{Re}\, p > s_0$. Если точка p стремится к бесконечности так, что $\mathrm{Re}\, p$ неограниченно возрастает, то $F(p)$ стремится к нулю в силу первой оценки. Отсюда следует, что $F(p) \to 0$, если $p \to \infty$, оставаясь внутри любого угла $-\pi/2 + \delta < \arg p < \pi/2 + \delta$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало, причем эта сходимость равномерна относительно $\arg p$. Если, в частности, $F(p)$ аналитична в бесконечно удаленной точке, то $F(p) \to 0$ при $p \to \infty$ по любому пути; следовательно, $F(p)$ просто должна иметь нуль в бесконечности.

1.3. **Обращение преобразования Лапласа.**

Теорема 1.2. *Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(p)$ служит ее изображением, то в любой точке t, где $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, справедливо равенство*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} F(p), \tag{1.3}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\mathrm{Re}\, p = a > s_0$ и понимается в смысле главного значения на бесконечности.

Здесь потребуется лемма Жордана.

Лемма Жордана. Пусть $f(z)$ – регулярная аналитическая функция комплексного переменного z в области $G = \{z : \mathrm{Im}\, z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$, C_R — полуокружность $|z| = R$, $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, $\max_{z \in C_R} |f(z)| \to 0$ при $R \to \infty$, $\alpha > 0$ Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0 \tag{1.4}$$

Мы приведем здесь, фактически, набросок доказательства, опуская некоторые детали. Математическое строгое и полное доказательство изложено, например, в § 1, п. 79 книги: М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат “Методы теории функций комплексного переменного”, гл. VI.

Рассмотрим интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{e^{pt}}{p},$$

взятый вдоль прямой $\mathrm{Re}\, p = a > 0$, проходимой снизу вверх. Обозначим еще через C_R и C'_R части окружности $|p| = R$, лежащие соответственно слева и справа от прямой $\mathrm{Re}\, p = a$, а через $a - ib$ и $a + ib$ – C_R и C'_R (нужно сделать рисунок).

Пусть $t > 0$; так как $1/p \to 0$ при $R \to \infty$ равномерно относительно $\arg p$, то по лемме Жордана имеем:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} dp\, \frac{e^{pt}}{p} = 0.$$

Следовательно, из теоремы Коши о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{e^{pt}}{p} + \int\limits_{C_R} dp\, \frac{e^{pt}}{p} = 2\pi i$$

в пределе при $R \to \infty$ получим, что

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to\infty} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{e^{pt}}{p} = 1 \tag{1.5}$$

при $t > 0$. Аналогично получаем $f(t) = 0$ при $t < 0$. Далее, мы имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\,\frac{e^{p(t-\tau)}}{p} = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}$$

а тогда для “ступеньки”

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\,e^{pt}\frac{e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}}{p} = \begin{cases} 0, & t < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2 \\ 0, & \tau_2 < t \end{cases} .$$

Приблизим теперь произвольный оригинал $f(t)$ ступенчатой функцией. В силу последнего равенства тогда

$$f(t) \cong \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\,e^{pt}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\frac{e^{-p\tau_k} - e^{-p\tau_{k+1}}}{p} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\,e^{pt}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)e^{-p\tau_k}\Delta'\tau_k\right),$$

где

$$\Delta'\tau_k = \frac{1 - e^{p(\tau_k - \tau_{k+1})}}{p}.$$

Таким образом, в пределе, когда точки τ_k заполняют весь интервал и все $\Delta'\tau_k \to 0$, мы получаем искомое выражение оригинала через его изображение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\,e^{pt}\left(\int\limits_0^{\tau} d\tau\,f(\tau)e^{-p\tau}\right).$$

Литература к лекции 1: М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат “Методы теории функций комплексного переменного”, гл. VI.

2. Лекция 2

2.1. Еще одна формулировка теоремы обращения. Мы доказали, что оригинал $f(t)$ вполне определяется своим изображением $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва $f(t)$. В самом деле, по доказанному значение оригинала в точке его непрерывности выражается через изображение $F(p)$, а значения оригинала в точках разрыва, очевидно, не влияют на изображение.

Теорема 2.1. *Если функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, стремится к нулю при $|p| \to \infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ равномерно относительно $\arg p$, и интеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, F(p)$ абсолютно сходится, то $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, данной в (1.3).*

Доказательство. Фиксируем некоторое число p_0, $\operatorname{Re} p_0 > a$, тогда из (1.3) следует:

$$\int\limits_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} \left(\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} F(p) \right).$$

Так как во внутреннем интеграле $p = a + i\sigma$, $dp = id\sigma$, то можно вынести за его знак множитель e^{at}, и получаем оценку

$$\left| \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{i\sigma t} F(p) \right| \leq e^{at} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma\, |F(a+i\sigma)|$$

Отсюда видно, что этот интеграл сходится равномерно относительно t, и, следовательно, в предыдущей формуле можно изменить порядок интегрирования. Мы получим:

$$\int\limits_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, F(p) \int\limits_0^\infty dt\, e^{(p-p_0)t} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{F(p)}{p-p_0}.$$

По условию теоремы на дуге окружности C'_R: $|p| = R$, $\operatorname{Re} p > a$, имеем $\max |F(p)| \to 0$ при $R \to \infty$, следовательно,

$$\left| \int\limits_{C'_R} dp\, \frac{F(p)}{p-p_0} \right| \to 0$$

в этом пределе. Следовательно

$$\int\limits_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} f(t) = F(p_0),$$

что и требовалось доказать. Заметим теперь, что при $t < 0$ по лемме Жордана мы получим $f(t) = 0$. Далее, из (1.3)

$$|f(t)| \leq \frac{e^{at}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma\, |F(a+i\sigma)| = M e^{at},$$

так что и условие 3 также выполняется. На проверке условия 1 мы не будем останавливаться.

2.2. **Предельные соотношения.** Если $f(t)$ и $f'(t)$ – оригиналы, $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0),$$

где $p \to \infty$ внутри угла $|\arg p| < \pi/2 - \delta$, при некоторм $\delta > 0$ и $f(0)$ – предел справа. Если таже существует $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty),$$

где $p \to 0$ внутри того же угла.

Доказательство. Пусть $f(t)$ дифференцируема. Тогда первый предел следует из следующих равенств:

$$pF(p) = p\int_0^\infty dt\, e^{-pt} f(t) = -\int dt_0^\infty \frac{\partial e^{-pt}}{\partial t} f(t) = f(0) + \int_0^\infty dt\, e^{-pt} f'(t), \tag{2.1}$$

и последний интеграл исчезает при $p \to \infty$. Если функция $f(t)$ не дифференцируема, то ее сколько угодно точно можно приблизить дифференцируемой, после чего проходит тоже доказательство. Для доказательства второго предела заметим, что существование $\lim_{t\to\infty} f(t)$ влечет ограниченность функции $f(t)$. Поэтому $s_0 = 0$ и последний интеграл в (2.1) существует при любом p, $\operatorname{Re} p > 0$ и существует при $p = 0$. В указанном в условии углу он сходится равномерно по p, так что в (2.1) можно перейти к пределу $p \to 0$ в этом углу, что дает $\int_0^\infty dt\, f'(t) = \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0)$.

Замечание 2.1. *Полученное асимптотическое поведение показывает, что при доказательстве того, что $pF(p) - f(0)$ имеет своим оригиналом $f'(t)$ по формуле*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt}(pF(p) - f(0))$$

последний интеграл нельзя разбивать на два, а следует записывать как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, pe^{pt}\left(F(p) - \frac{f(0)}{p}\right) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt}\left(F(p) - \frac{f(0)}{p}\right) =$$

(в предположении, что можно дифференцировать под знаком интеграла)

$$= \frac{d}{dt}(f(t) - f(0)\eta(t)) = f'(t) \qquad \textit{при } t > 0.$$

2.3. **Свойства преобразования Лапласа.** Простейшие преобразования:

$$1 \doteqdot \frac{1}{p} \text{ преобразование } \eta(t); \qquad e^{p_0 t} \doteqdot \frac{1}{p - p_0}. \tag{2.2}$$

Далее обозначаем: $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$ и т.д.

I Линейность: $\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p)$.

II Подобие: для любого постоянного$\alpha > 0$ имеем $f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

III Если функция $f(t)$ напрерывна при $t > 0$ и $f'(t)$ (или $f^{(n)(t)}$) является оригиналом, то

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),$$
$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim_{t\to +0} f^{(k)}(t)$.

IV Дифференциирование изображения: $F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t)$.

V Интегрирование оригинала: $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$.

Если $f(t)$ – оригинал, то легко видеть, что $g(t) = \int_0^t dt\, f(t)$ также является оригиналом. Тогда по III $f(t) = g'(t) \doteqdot pG(p)$ (учли, что $g(0) = 0$). Откуда, $f(t) \sim F(p) = pG(p)$, откуда следует результат.

VI Интегрирование изображения. Если интеграл $\int_p^\infty dp\,F(p)$ сходится, то он служит изображением функции $f(t)/t$:

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^\infty dp\,F(p),$$

т.е. интегрирование изображения равносильно делению оригинала на t.

Доказательство. Имеем: $\int_p^\infty dp\,F(p) = \int_p^\infty dp \int_0^\infty dt\,e^{-pt} f(t)$. Пусть путь интегрирования (p,∞) весь лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$. Тогда $\left|\int_0^\infty dt\,e^{-pt} f(t)\right| \leq M \int_0^\infty dt\,e^{-(a-s_0)t}$, что доказывает равномерную сходимость относительно этого интеграла по p. Поэтому мы можем изменить порядок интегрирования:

$$\int_p^\infty dp\,F(p) = \int_0^\infty dt\,e^{-pt}\frac{f(t)}{t},$$

откуда следует утверждение. Отсюда же следует сходимость последнего интеграла.

VII Теорема запаздывания. Для любого $\tau > 0$: $f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}F(p)$.

VIII Теорема смещения. Для любого комплексного p_0: $e^{p_0 t} f(t) \doteqdot F(p-p_0)$.

2.4. **Свертка, теорема Бореля и интеграл Дюамеля.** Для дальнейшего нам потребуется понятие свертки функций. **Сверткой** функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция

$$(f*g)(x) = \int dy\,f(x-y)g(y), \tag{2.3}$$

если данный интеграл существует. В этом преположении укажем простейчие свойства свертки.

(1) Свертка линейна по каждому аргументу.
(2) Свертка коммутативна: $f*g = g*f$.
(3) Дистрибутивность: $f*(g+h) = f*g + f*h$.
(4) Ассоциативность: $f*(g*h) = (f*g)*h$. Требует для своего доказательства существования и перестановочности всех интегралов в формальной выкладке

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(x) &= \int dy\,f(x-y)\int dz\,g(y-z)h(z) = \\ &= \int dz\left(\int dy\,f(x-y)g(y-z)\right)h(z) = \\ &= \int dz\left(\int dy\,f(x-z-y)g(y)\right)h(z) = \\ &= \int dz(f*g)(x-z)h(z) = ((f*g)*h)(x).\end{aligned}$$

Свертка заведомо существует, если функции - оригиналы для преобразования Лапласа. Тогда, как следует из свойства (2) оригинала

$$(f*g)(t) = \int\limits_0^t d\tau\,f(t-\tau)g(\tau), \tag{2.4}$$

что определено в силу свойства (3) и обращается в ноль при $t<0$. Пусть s_0 – наибольшее из показателей роста оригиналов, тогда

$$\left|\int_0^t d\tau\,f(\tau)g(t-\tau)\right| \leq M\left|\int_0^t d\tau\,e^{s_0\tau}e^{s_0(t-\tau)}\right| = Mte^{s_0 t},$$

т.е. такой интеграл имеет показатель $s_0+\epsilon$, где ϵ – любое сколь угодно малое положительное число. Покажем, что свертка двух изображений удовлетворяет условию Гельдера. Действительно, поскольку $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют всем трем свойствам изображений, справедливы следующие оценки:

$$|(f*g)(t+h)-(f*g)(t)| =$$
$$= \left| \int\limits_t^{t+h} d\tau\, f(t+h-\tau)g(\tau) + \int\limits_0^t [f(t+h-\tau)-f(t-\tau)]g(\tau) \right| \le$$
$$\le M_1 M_2 \int\limits_t^{t+h} d\tau\, e^{(t+h-\tau)s_1+\tau s_2} + |h|^a A(t) M_2 \int\limits_0^t d\tau e^{s_2\tau} \le |h|^{a'} A',$$

где $|h| \le h_0'$ для некоторых новых констант a', A' и h_0, где A', вообще говоря, может зависеть от t. Что и доказывает свойство Гельдера для свертки.

Теперь мы можем доказать теорему умножения (теорему Бореля):

Теорема 2.2. *Произведение двух изображений $F(p)$ и $G(p)$ также является изображением, причем:*

$$F(p)G(p) \doteqdot (f*g)(t).$$

Доказательство. Для изображения свертки имеем:

$$\int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau) \doteqdot \int_0^\infty dt\, e^{-pt} \int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau).$$

Справа здесь стоит двукратный интеграл по сектору плоскости (t,τ): интегрирование по τ ведется в пределах от 0 до t, а затем ро t от 0 до ∞. Так как при $\operatorname{Re} p > s_0$ этот двукратный интеграл абсолютно сходится, то в нем можно изменить порядок интегрированиям, и мы получим (заменяя еще t на $t_1 = t-\tau$:

$$\int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau) \doteqdot \int_0^\infty d\tau\, f(\tau) \int_\tau^\infty dt\, e^{-pt} g(t-\tau) =$$
$$= \int_0^\infty d\tau\, e^{-p\tau} f(\tau) \int_0^\infty dt_1\, e^{-pt_1} g(t_1) = F(p)G(p),$$

что и требовалось доказать. Теорема Бореля утверждает, что умножение изображений равносильно свертыванию оригиналов.

В приложениях полезно следствие теоремы умножения, которое относится к случаю, когда надо найти оригинал произведения $pF(p)G(p)$. Пользуясь правилом дифференцирования оригинала и (2.2), имеем **интеграл Дюамеля**:

$$pF(p)G(p) \doteqdot f(0)g(t) + (f'*g)(t),$$

что легко следует из (2.2) и правила дифференцирования оригинала. В силу симметрии свертки интеграл Дюамеля можно записать также как

$$pF(p)G(p) \doteqdot f(0)g(t) + (g*f')(t),$$

а переставляя $F \leftrightarrow G$, получаем

$$pF(p)G(p) \doteqdot f(t)g(0) + (g'*f)(t) \equiv g(0)f(t) + (f*g')(t),$$

Справедлива также теорема двойственная теореме умножения.

Теорема 2.3. *Пуста даны два оригинала $f(t)$ и $g(t)$ с показателями роста s_1 и s_2. Их произведение также является оригиналом, причем*

$$f(t)g(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq\, F(q)G(p-q),$$

где $a > s_1$ и $\operatorname{Re} p > s_2 + a$.

Доказательство. В самом деле, произведение $f(t)g(t)$, очевидно, удовлетворяет условиям для оригиналов, поэтому для его изображения имеем

$$f(t)g(t) \doteqdot \int_0^\infty dt\, e^{-py} f(t)g(t).$$

Возьмем $a > s_1$ и заменим $f(t)$ по формуле обращения:

$$f(t)g(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty dt \left\{ \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq\, e^{qt} F(q) \right\} e^{-pt} g(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq \left\{ F(q) \int_0^\infty dt\, e^{-(p-q)t} g(t) \right\},$$

где перестановочность интегралов следует из их равномерной сходимости. Полагая $\operatorname{Re} p > s_2 + a$, получаем что $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$, поскольку $\operatorname{Re} q = a$. Поэтому внутренной интеграл равен $G(p-q)$.■

Заметим что так как a можно взять сколь угодно близким к s_1, то изоображение функции $f(t)g(t)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s$, где $s = s_1 + s_2$ – показатель роста этой функции.

2.4.1. *Примеры.* Свойство 1 (линейность) позволяет находить по (2.2) такие преобразования, как

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$\cos\omega t = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad \sinh\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2-\omega^2}, \qquad \cosh\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

Свойство IV позволяет получить по (2.2)

$$t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad t^n e^{p_0 t} \doteqdot \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$$

а из предыдущих формул

$$t \sin\omega t =\doteqdot \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}, \qquad t\cos\omega t =\doteqdot \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2},$$

В силу (2.2)

$$e^{bt} - e^{at} \doteqdot \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a},$$

так что по Свойству VI, получаем

$$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty dp' \left(\frac{1}{p'-b} - \frac{1}{p'-a}\right) = \ln\frac{p-a}{p-b}.$$

Аналогично предыдущему примеру по изображению синуса получаем:

$$\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty \frac{dp'}{1+p'^2} = \operatorname{arcctg} p.$$

Применяя свойство V, найдем изображение интегрального синуса

$$\operatorname{si}t \equiv \int_0^t \frac{\sin t}{t} \doteqdot \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$$

2.4.2. *Начальные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.* Пусть задан дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка n:

$$L = a_0\frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n.$$

Требуется решить начальную задачу

$$Lx(t) = f(t), \tag{2.5}$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \tag{2.6}$$

причем $a_0 \neq 0$, и $f(t)$ и $x(t)$ вместе со своими производными до n-го порядка суть оригиналы: $F(p) \risingdotseq f(t)$ $X(p) \risingdotseq x(t)$. Тогда, по правилу дифференцирования и линейности получаем операторное уравнение:

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)X(p) = F(p) + x_0(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + \\ + x_1(a_0p^{n-2} + a_1p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + x_{n-1}a_0,$$

т.е.

$$A(p)X(p) = F(p) + B(p).$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}.$$

Можно доказать, что решение $x(t)$ поставленной задачи всегда существует и является оригиналом $X(p)$.

Рассмотрим пример: решить уравнение $x'' - x = 1$ при произвольных начальных данных. По сказанному

$$X(p) = \frac{1}{p^2-1}\left(\frac{1}{p} + x_0p + x_1\right),$$

так что $x(t) = (1 + x_0)\cosh t + x_1 \sinh t - 1$.

Вернемся к задаче (2.5) с нулевыми начальными условиями (2.6). Пусть известно решение $x_1(t)$ уравнения $Lx_1(t) = 1$. Тогда имеем:

$$A(p)X(p) = F(p), \qquad A(p)X_1(p) = \frac{1}{p},$$

откуда $X(p) = pX_1(p)F(p)$. Поэтому, по формуле Дюамеля

$$x(t) = \int_0^t d\tau\, x_1'(t-\tau)f(\tau).$$

Таким образом $x_1'(t-\tau)$ – **функция Грина** рассматриваемой задачи.

Мы видим, что функция Грина начальной задачи (задачи Коши) с нулевыми начальными условиями для линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами существует, равна 0 при $t < s$, зависит от разности $t - s$ при $s < t$ и задается формулой Дюамеля.

Литература к Лекции 2: М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат “Методы теории функций комплексного переменного”, гл. VI.

3. Лекция 3.

3.1. Граничные задачи и их функции Грина. Перейдем к рассмотрению граничных задач, причем мы не будем предполагать, что рассматриваемые функции – оригиналы для преобразования Лапласа. Пусть L – дифференциальный оператор n-го порядка

$$L_x = a_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x),$$

где a_0 не обращается в ноль тождественно. Пусть нам следует решить задачу

$$L_x f(x) = g(x), \qquad a < x < b, \tag{3.1}$$

где a и b конечны, а все заданные функции $a_i(x)$ и $g(x)$ гладкие и дифференцируемые нужное число раз. Предполагая существование решения, будем искать его для любой функции $g(x)$ в виде

$$f(x) = \int_a^x dy\, G_+(x,y)g(y) + \int_x^b dy\, G_-(x,y)g(y) \tag{3.2}$$

где $G_+(x,y)$ и $G_-(x,y)$ – гладкие n раз дифференцируемые функции x. Очевидно, что

$$f'(x) = G_+(x,x)g(x) - G_-(x,x)g(x) + \int_a^x dy\, G'_+(x,y)g(y) + \int_x^b dy\, G'_-(x,y)g(y),$$

где $G_+(x,x) = G_+(x,x-0)$, $G_-(x,x) = G_+(x,x+0)$, и штрих означает производную по x. Если $n > 0$, то при подстановке в (3.2) мы получим производную функции g. Поэтому этот член следует занулить, наложив условие $G_+(x,x) = G_-(x,x)$, $a < x < b$. Далее, по индукции, получаем, что мы должны наложить условия

$$G_+^{(k)}(x,x) = G_-^{(k)}(x,x), \quad k = 0,\ldots,n-2,$$

что дает при $k = 1,\ldots,n-1$:

$$f^k(x) = \int_a^x dy\, G_+^{(k)}(x,y)g(y) + \int_x^b dy\, G_-^{(k)}(x,y)g(y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = {} & \big(G_+^{(n-1)}(x,x) - G_-^{(n-1)}(x,x)\big)g(x) + \\ & + \int_a^x dy\, G_+^{(n)}(x,y)g(y) + \int_x^b dy\, G_-^{(n)}(x,y)g(y). \end{aligned}$$

Подстановка в (3.2) дает:

$$\begin{aligned} & L_x G_+(x,y) = 0, \quad a < y < x < b, \\ & L_x G_-(x,y) = 0, \quad a < x < y < b, \\ & G_+^{(n-1)}(x,x) - G_-^{(n-1)}(x,x) = a_0(x). \end{aligned}$$

Таким образом мы построили **фундаментальное решение** рассматриваемой задачи, т.е. такое решение, через которое выражается любое другое:

$$f(x) = \int_a^b dy\, G(x,y)g(y), \qquad G(x,y) = \eta(x-y)G_+(x,y) + \eta(y-x)G_-(x,y). \tag{3.3}$$

Наложив на него необходимые **граничные условия**, мы получаем **функцию Грина**. При этом n условий "на диагонали" $y = x$ уже были наложены. Остается наложить еще n граничных условий.

Итак, мы видим, что $L_x \int\limits_a^b dy\, G(x,y)g(y) = g(x)$, т.е., все вместе дает **функционал**, отображающий функцию в ее значение в некоторой точке, являющейся параметром этого функционала. Такой функционал былл введен Дираком и назван δ-функцией, причем он подразумевал именно "интегральную" форму записи:

$$\int dx\, \delta(x) f(x) = f(0). \tag{3.4}$$

Тогда полученный выше результат можно записать как

$$L_x G(x,y) = \delta(x-y). \tag{3.5}$$

Литература к лекции 3: М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат "Методы теории функций комплексного переменного", гл. VI.

4. Лекция 4

4.1. **Обобщенные функции: основные определения.** Понятно, что δ-функция не есть функция в стандартном понимании (фон Нейман!): при всех $x \neq 0$ она равна нулю, а интеграл от нее нулю не равен, в частности $\int dx\, \delta(x) = 1$. Фактически, мы встречались с ней и ранее, когда использовали формулу Дюамеля. Ведь, строго говоря, мы решали уравнение на $x_1(t)$: $Lx_1(t) = \eta(t)$, а для формулы Дюамеля нам нужна производная $x_1'(t-\tau)$, которая удовлетворяет уравнению $Lx_1'(t-\tau) = \dfrac{d\eta(t-\tau)}{dt}$, так что естественно считать, что производная $\eta(t)$ есть $\delta(t)$. Итак, нам нужны линейные функционалы на "гладких" функциях: понятно, что для $f(x) = 1/x$ правая часть (3.4) неопределена. Фактически, мы уже пользовались такими функционалами, заданными интегралами и свертками, причем нам совсем не мешало, что в некоторых точках функции не были определены - лишь бы существовали интегралы. Это позволяет не только обобщить понятие функции, но и сделать их всех бесконечно дифференцируемыми, используя формулу интегрирования по частям, как определение. При этом, чтобы не мешали граничные члены, желательно выбрать функции, на которых заданы эти функционалы достаточно быстро убывающими на бесконечности. Итак, мы вводим два множества **основных функций**.

Определение 4.1. *Рассмотрим множество всех (комплекснозначных) бесконечно дифференцируемых функций $\phi(x)$, $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ от n вещественных переменных. Мы говорим, что функция из этого множества принадлежит пространству*

1) $\mathscr{D}$ основных функций (пространству финитных функций), если она финитна, т.е., обращается в ноль вне некоторой конечной области в $\mathbb{R}^n$.

2) $\mathscr{S}$ основных функций (пространству быстро убывающих функций), если при $|x| \to \infty$ она стремится к нулю вместе со всеми своими производными быстрее любой конечной степени $|x|$, т.е. при всех x выполнены неравенства

$$|x^k \phi^{(q)}(x)| \leq C_{k,q}, \quad k, q = 0, 1, \ldots$$

Примеры:

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{a^2}{x^2 - a^2}, & \text{если } x^2 < a^2, \\ 0, & \text{если } x^2 \geq a^2, \end{cases} \in \mathscr{D}, \tag{4.1}$$

$$\phi(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}. \tag{4.2}$$

Понятно, что оба введенные пространства линейны. Зададим на них топологию посредством

Определение 4.2. *Мы говорим, что последовательность основных функций $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$*

1) сходится к нулю в пространстве $\mathscr{D}$, если все функции последовательности обращаются в ноль вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю, как и их производные любого поряда,

2) сходится к функции $\phi(x)$ в пространстве $\mathscr{S}$, если в любой ограниченной области производная любого порядка от $\phi_n(x)$ равномерно сходится к соответствующей производной функции $\phi(x)$ и в оценках

$$|x^k \phi_n^{(q)}(x)| \leq C_{k,q}, \quad k, q = 0, 1, \ldots,$$

постоянные $C_{k,q}$ можно выбрать независящими от n.

Понятно, что $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$, причем плотно в нем (доказательство: умножим функцию из $\mathscr{S}$ на функцию, определенную в (4.1) и перейдем к пределу $a \to \infty$).

Определение 4.3. *Обобщенной функцией, заданной на соответствующем пространстве основных функций, называется линейный непрерывный функционал на этом пространстве. Иными словами, каждой основной функции $\phi(x)$ сопостовляется число, обозначаемое (f, ϕ), причем выполнены следующие условия:*

1) для любых двух чисел a_1 и a_2 и любых двух основных функций $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ имеет место равенство $(f, a_1\phi_1 + a_2\phi_2) = a_1(f, \phi_1) + a_2(f, \phi_2)$ (линейность);

2) если последовательность основных функций $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$ стремится к нулю, то последовательность чисел (f, ϕ_1), (f, ϕ_2), $\ldots$,
(f, ϕ_n), $\ldots$ сходится к нулю (непрерывность).

Иными словами, $f \in \mathscr{S}$ тогда и только тогда, когда найдутся такие k m

$$|(f, \phi)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^k \phi^{(m)}(x)|.$$

Пусть задана некоторая функция $f(x)$, абсолютно интегрируемая в каждой конечной области пространства $\mathbb{R}^n$ (называется локально интегрируемой функцией). Зададим функционал

$$(f, \phi) = \int dx\, f(x)\phi(x). \tag{4.3}$$

Показать, что это – линейный непрерывный функционал на обоих пространствах.

Литература к лекции 4: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. I; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”.

5. Лекция 5

5.1. Локальные свойства обобщенных функций. Регуляризация $1/x$:

$$\left(\frac{1}{x},\phi\right)=\int\limits_{-\infty}^{-a}dx\frac{\phi(x)}{x}+\int\limits_{-a}^{b}dx\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\phi(x)+\int\limits_{b}^{\infty}dx\frac{\phi(x)}{x},$$

для некоторых положительных a и b. Если $a=b$, то эта регуляризация совпадает с главным значением

$$\left(\frac{1}{x},\phi\right)=\text{p.v.}\int dx\frac{\phi(x)}{x}\equiv\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|x|>\epsilon}dx\frac{\phi(x)}{x}\equiv\int\limits_{0}^{\infty}dx\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}.$$

Обобщенная функция f равна нулю в окрестности U точки x_0 означает, что $(f,\phi)=0$ для каждой основной функции ϕ, отличной от нуля только внутри U. Обобщенная функция f, отвечающая обычной функции $f(x)$, равна нулю в окрестности U точки x_0, если почти всюду в этой окрестности функция $f(x)$ обращается в нуль. Обобщенная функция $\delta(x-x_0)$ равна нулю в окрестности любой точки, отличной от x_0. Обобщенная функция f равна нулю в открытой области G, если она равна нулю в окрестности каждой точки этой области. Если обобщенная функция f не равна нулю ни в какой окрестности точки x_0, то такая точка называется существенной для f (ноль - существенная точка для $f(x)=x^2$). Обобщенные функции f и g совпадают в открытой области G, если разность $f-g$ в этой области равна нулю. Если f и g совпадают в окрестности каждой точки, то они совпадают в целом, т.е. $(f,\phi)=(g,\phi)$ для любой ϕ. Обобщенная функция f регулярна в области G, если в этой области она совпадает с некоторой обычной локально интегрируемой функцией $f(x)$.

Указанная выше регуляризация дает пример решения общей задачи: пусть дана функция $f(x)$, которая не является локально интегрируемой. Найти обобщенную функцию f, совпадающую с данной во всех точках ее локальной интегрируемости. Это не всегда возможно: $\exp 1/x$. При этом следует сохранить основные операции: сложение, умножение на число, умножение на функцию, сдвиг аргумента, дифференцирования и интегрирования. Часть их определяется тривиально путем переноса обратных операций на основные функции. Рассмотрим замену переменных. Пусть даны локально интегрируемая функция $f(x)$ и бесконечно дифференцируемая строго монотонная функция $a(x)$, тогда для любой основной функции $\phi(x)$

$$\int dx\, f(a(x))\phi(x)=\int dy\,(a^{-1}(y))'f(y)\phi(a^{-1}(y))$$

где $y=a(x)$ и a^{-1} означает обратную функцию. Поскольку произведение $(a^{-1}(y))'\phi(a^{-1}(y))$ также является основной функцией (в пространстве $\mathscr{S}$ следует потребовать роста $a(x)$ на бесконечности). Поэтому каждой обобщенной функции f мы сопоставляем обобщенную функцию $f(a)$ по правилу:

$$(f(a),\phi)=(f,(a^{-1})'\phi(a^{-1}))$$

В частности

$$(\delta(a),\phi)=(a^{-1}(y))'\phi(a^{-1}(y))|_{y=0}.$$

Пусть $a(x_0)=0$ – ноль (единственный) функции $a(x)$. Тогда $\delta(a(x))=\frac{\delta(x-x_0)}{a'(x_0)}$. В некоторых случаях можно отказаться от требования монотонности. Например

$$\delta(a(x))=\sum_j\frac{\delta(x-x_j)}{|a'(x_j)|},$$

где суммирование ведется по всем нулям x_j функции $a(x)$. Понятно, что все нули должны быть простыми.

Общее определение произведения обобщенных функций невозможно, однако можно определить умножение на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$, поскольку для каждой основной функции $\phi(x)$ произведение $a(x)\phi(x)$ также является основной функцией (для пространства $\mathscr{S}$ следует потребовать от $a(x)$ роста на бесконечности не быстрее полиномиального).

А если последовательность $\phi_n(x) \to 0$, то и $a(x)\phi_n(x) \to 0$ в смысле основных функций. Поэтому каждой обобщенной функции f можно сопоставить обобщенную функцию af посредством

$$(af, \phi) = (f, a\phi),$$

что дает линейный и непрерывный (в силу сказанного выше) функционал на пространстве основных функций.

5.2. **Сходимость обобщенных функций и δ-образные последовательности.** Мы говорим, что последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots$ сходится к к обобщенной функции f, если

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, \phi) = (f, \phi).$$

Тогда дифференцирование – непрерывная операция. Действительно, если последовательность обобщенных функций $f_n \to f$ $n \to \infty$

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \phi\right) = -\left(f_n, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \to -\left(f, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \phi\right).$$

Пример: $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$.

δ-образная последовательность – последовательность регулярных функционалов, сходящаяся к δ-функции. При этом должны выполняться следующие условия:

а) для любого $M > 0$ при $|a| \leq M$ и $|b| \leq M$ величины $\left|\int dx f_n(x)\right|$ ограничены постоянной не зависящей от a, b и n (но возможно зависящей от M);

б) при любых фиксированных $a < b$, отличных от нуля,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b dx\, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } a < b < 0 0 < a < b \\ 1 \text{ при } a < 0 < b \end{cases}$$

Пусть $f_n(x)$ такая последовательность. Рассмотрим последовательность функций $F_n(x) = \int_{x-1}^{\infty} dy\, f_n(y)$. Она равномерно по n ограничена в каждом промежутке, так что $F_n(x) \to \eta(x)$. Отсюда ввиду непрерывности дифференцирования $f_n(x) \to \delta(x)$. Пример: $f_n(x) = \frac{1}{\epsilon}\eta_{-\epsilon,0}(x) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\eta_{0,\epsilon}(x)$.

Литература к лекции 5: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. I; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”.

6. Лекция 6

6.1. **Формулы Сохоцкого и предельные значения голоморфных функций.** Из курса ТФКП известно, что если C – кривая в $\mathbb{C}$ и $f(\xi)$ – интегрируемая функция на C, то определен интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - z}$$

Утверждение. $\Phi(z)$ аналитична вне C (по теореме о зависимости от параметра)), но на C функция $\Phi(z)$ не определена. Чему равен предел $\Phi(z)$, когда $z \to \xi_0 \in C$, если он существует?
Пример. C – замнкнутый контур. $f(\xi)$ – ограничение на C голоморфной функции. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - z} = \begin{cases} f(z), & z \text{ внутри } C \\ 0, & z \text{ вне } C \end{cases}.$$

Общий случай дается теоремой Сохоцкого.

Теорема 6.1. *Пусть $f(\xi)$ локально и глобально интегрируема на C и удовлетворяет условию Гельдера в окрестности ξ_0, где $\xi_0 \in \mathbb{C}$ – не точка излома и не концевая точка. Тогда*

$$\Phi(z) \to \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - \xi_0} + \frac{f(\xi_0)}{2}, & z \to \xi_0 \text{слева}, \\ \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - \xi_0} - \frac{f(\xi_0)}{2}, & z \to \xi_0 \text{справа}, \end{cases}$$

где p.v. – предел интеграла по C с вырезанным вокруг ξ_0 симметричным относительно ξ_0 отрезком при стремлении его длины к нулю.

Доказательство. Докажем для $C = \mathbb{R}$. Считаем, что $f(\xi)$ убывает на бесконечности. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - z} = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{+R} \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - z}.$$

Поскольку $f(\xi)$ удовлетворяет условию Гельдера, то при $z \to \xi_0 \in R$

$$\int\limits_{-R}^{+R} \frac{d\xi\,(f(\xi) - f(z))}{\xi - z} \to \int\limits_{-R}^{+R} \frac{d\xi\,(f(\xi) - f(\xi_0))}{\xi - \xi_0}$$

тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\,(f(\xi) - f(z))}{\xi - z} \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\,(f(\xi) - f(\xi_0))}{\xi - \xi_0} = \text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - \xi_0}.$$

Здесь главное значение ввиду особенности около ξ_0: на бесконечности интегралы сходятся ввиду убывания $f(\xi)$. Далее, при $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-R}^{+R} \frac{d\xi}{\xi - z}\Bigg|_{z=\xi_0 \pm i\epsilon} = \int\limits_{-R}^{+R} \frac{d\xi}{\xi - \xi_0 \mp i\epsilon} = \\ &= \ln(\xi - \xi_0 \mp i\epsilon)\Big|_{\xi=-R}^{\xi=R} = \\ &= \ln R + i\arg(R - \xi_0 \pm i\epsilon) - \ln R - i\arg(-R - \xi_0 \pm i\epsilon). \end{aligned}$$

Поэтому в пределе $\epsilon \to +0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\, f(z)}{\xi - z} \to \pm i\pi f(\xi_0).$$

Замечание 6.1. *Пусть* $\Phi_\pm(z)$ *– интегралы Коши* $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - z}$ *в верхней и нижней полуплоскостях. По формуле Сохоцкого* $\Phi_\pm(z)$ *имеют пределы при* $\xi \to \mathbb{R}$*, причем*

$$\begin{cases} \Phi_+(\xi) - \Phi_-(\xi) = f(\xi), \\ \Phi_+(\xi) + \Phi_-(\xi) = \dfrac{1}{\pi i} p.v. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{d\xi'\, f(\xi')}{\xi' - \xi}. \end{cases}$$

Любая $f \in C^1(\mathbb{R})$ $f \to 0$*, убывающая на бесконечности, представима как скачок голоморфных функций.*

Замечание 6.2. *Дла любой* $\phi \in \mathscr{D}$ *по формуле Сохоцкого–Вейрштрассе*

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{dx\, \phi(x)}{x - (\xi \pm i0)} = \frac{1}{2\pi i} p.v. \int \frac{dx\, \phi(x)}{x - \xi} \pm \frac{\phi(\xi)}{2},$$

так что теорема есть расширение формулы с $\mathscr{D}$ *на функции, удовлетворяющие условию Гельдера.*

6.2. **Прямое произведение обобщенных функций и свертка.** Пусть заданы обобщенные функции $f(x)$ и $g(x)$. Пусть $\phi(x,y)$ – основная функция, скажем из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. Тогда прямое произведение $f \times g$ определяется как

$$(f(x) \times g(y), \phi(x,y)) = (f(x), (g(y), \phi(x,y))).$$

Свойства:

$$\begin{aligned} &\text{Коммутативность:} && f(x) \times g(y) \\ &\text{Ассоциативность:} && f(x) \times \{g(y) \times h(z)\} = \{f(x) \times g(y)\} \times h(z). \end{aligned}$$

Доказательство следует из того факта, что любую основную функцию $\phi(x,y)$ можно приблизить суммами $\sum_{j=1}^n \phi_j(x)\psi_j(y)$, где $j = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\phi_j(x)$ и $\psi_j(y)$ – последовательности основных функций своих переменных. Кроме того,

$$(f(x) \times g(y), \phi(x)\psi(y)) = (f(x), \phi(x))(g(y), \psi(y)).$$

Если $f(x)$ и $g(x)$ – две абсолютно интегрируемых функции на прямой, то их свертка определяется как

$$(f * g)(x) = \int dy f(y) g(x-y) \equiv \int dy f(x-y) g(y).$$

Так что для любой основной функции $\phi(x)$:

$$((f * g)(x), \phi(x)) = \int dx \int dy f(y) g(x) \phi(x+y).$$

Поэтому для обобщенных функций f и g мы определим свертку как

$$(f * g, \phi) = (f(x) \times g(y), \phi(x+y)),$$

если указанный функционал существует. Важно помнить, что $\phi(x+y)$ не есть обобщенная функция, так что он не обязан существовать. В частности, это определение осмыслено, если

1) одна из обобщенных функций имеет ограниченный носитель;

2) носители обоих обобщенных функций ограничены с одной и той же стороны, например, $f = 0$ при $x < a$ и $g = 0$ при $y < b$.

Для доказательства в $\mathscr{D}'$ следует рассмотреть выражения $(f(x), \phi(x+y))$. Так в случае 1) это – основная функция от y. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} &\delta * f = f \quad \text{для любой обобщенной функции} \quad f, \\ &f * g = g * f, \quad \text{по крайней мере в случаях 1) и 2)}, \\ &(f * g) * h = f * (g * h), \end{aligned}$$

если носители двух из трех функционалов ограничены, или когда носители всех трех ограничены с одной стороны, кроме того для любого дифференциального оператора D выпоняется

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg.$$

Условия непрерывности свертки, т.е. из $f_n \to f$ следует $f_n * g \to f * g$, нужно проверять в каждом частном случае. Например, если сходящаяся последовательность f_n такая, что все ее элементы имеют носитель в одном и том же ограниченном множестве, то это справедливо. Аналогично и для равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial t} * g.$$

6.3. **Формулы Сохоцкого и аналитическое представление обобщенных функций.** Формулы Сохоцкого, примененные к основным функциям (см. Замечание 6.2)

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{dx\,\phi(x)}{x-(\xi \pm i0)} = \frac{1}{2\pi i}\text{p.v.}\int \frac{dx\,\phi(x)}{x-\xi} \pm \frac{\phi(\xi)}{2},$$

могут быть прочитаны (при $\xi = 0$) как следующие равенства обобщенных функций

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+i0} &= \text{p.v.}\frac{1}{x} - \pi i\delta(x), \\ \frac{1}{x-i0} &= \text{p.v.}\frac{1}{x} + \pi i\delta(x), \end{aligned} \tag{6.1}$$

которые также называются формулами Сохоцкого. Они могут быть также получены дифференциированием функции $\log(x \pm i\varepsilon)$, поскольку $\dfrac{1}{x \pm i0} = \lim_{\varepsilon\to\pm 0}\dfrac{1}{x+i\varepsilon}$. Выразим из этих формул обобщенные функции $\delta(x)$ и $1/x$ в смысле главного значения:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right), \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0} + \frac{1}{x-i0}\right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Функция $\dfrac{1}{x+i0}$ есть предельное значение функции $\dfrac{1}{z}$, где $z = x+iy$ и $y \to +0$, функция же $\dfrac{1}{x-i0}$ есть предельное значение функции $\dfrac{1}{z}$, где $y \to -0$. Таким образом, формулы Сохоцкого представляют обобщенные функции $\delta(x)$ и $1/x$ в виде разности граничных значений функции, голоморфной в верхней полуплоскости и функции, голоморфной в нижней полуплоскости.

Представление обобщенной функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

где $f^+(x)$ – граничное значение (не обобщенной!) функции, голоморфной в верхней полуплоскости, а где $f^-(x)$ – граничное значение функции, голоморфной в нижней полуплоскости, называется **аналитическим представлением обобщенной функции** f. Имеет место

Теорема (см. Бремерман, "Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье"): Всякая обобщенная функция из $\mathscr{D}'$ допускает аналитическое представление.

В общем случае найти аналитическое представление обобщенной функции непросто. Однако, если f – обобщенная функция с компактным носителем, или при достаточно больших x совпадающая с абсолютно интегрируемой функцией $f(x)$, убывающей на бесконечности, то аналитическое представление f находится при помощи интеграла Коши:

$$f^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'\,f(x')}{x'-z} \equiv \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'\,f(x')}{z-x'}, \qquad z = x+iy \in \mathbb{C},$$

Иными словами, аналитические в полуплоскостях функции $f^{\pm}(z)$ получаются сверткой функции $f(x)$ и ядра Коши $(-2\pi iz)^{-1}$:

$$f^{\pm}(z) = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{z} * f\right).$$

Например, для $f(x) = \delta(x)$ эта формула дает

$$f^{\pm}(z) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'\,\delta(x')}{z - x'} = \frac{i}{2\pi z},$$

так что мы возвращаемся к первому равенству в (6.2):

$$\delta(x) = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0}\right).$$

Для $f(x) = 1/x$ несколько более сложные вычисления дают $f^{\pm}(z) = \pm 1/2z$, что приводит к аналитическому представлению обобщенной функции $1/x$, полученному ранее из формул Сохоцкого:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + i0} + \frac{1}{x - i0}\right).$$

6.4. **Преобразование Фурье.** Для произвольной основной функции определим преобразование Фурье посредством

$$\psi(\xi) = \int dx\, e^{ix\xi}\phi(x),$$

обозначение: $\widetilde{\phi(x)}$ или $F[\phi(x)]$. При этом $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, а $\mathscr{D}$ переходит в пространство аналитических функций. Обратное преобразование:

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int d\xi\, e^{-ix\xi}\psi(\xi), \qquad \phi = F^{-1}[\psi].$$

Если обобщенная функция f задается абсолютно интегрируемой функцией $f(x)$, то ее преобразование Фурье есть

$$F[f](\xi) = \int dx\, e^{ix\xi} f(x),$$

так что для основной функции ϕ и ее Фурье-образа ψ выполняется равенство

$$(F[f](\xi), \psi(\xi)) = 2\pi(f(x), \phi(-x)).$$

Для произвольной обобщенной функции это равенство является определением преобразования Фурье. Обратное преобразование определяется аналогично. Тогда для любого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами P имеем

$$P\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right) F[f](\xi) = F[P(ix)f(x)](\xi).$$

Если обобщенные функции f и g такие, что их свертка существует, то в силу сделанных определений

$$F[f * g](\xi) = F[f](\xi)F[g](\xi),$$

т.е. в правой части возникает произведение обобщенных функций. Поскольку условия существования свертки контролировать легче, чем условие существования произведения обобщенных функций, последнее равенство часто берется в качестве определения этого произведения. В частности, легко доказать, что в смысле обобщенных функций

$$\frac{1}{x \pm i0}\frac{1}{x \pm i0} = \frac{1}{(x \pm i0)^2}.$$

Литература к лекции 6: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. II; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”, Бремерман, “Распределения, комплексные переменныеи преобразование Фурье”.

7. Лекция 7

7.1. Свойства преобразований Фурье. Как мы уже говорили, произведения обобщенных функций, вообще говоря, неопределены. Примеры: $\frac{1}{x}\delta(x)$, $x\frac{1}{x}\delta(x)$. Однако, возможны и исключения, например:

$$\eta(x)\eta(x-a) = \eta(x-a), \qquad a \geq 0.$$

Свертка обобщенных функций

$$(f * g, \phi) = (f(x) \times g(y), \phi(x+y)),$$

может быть определена. Например, когда одна из обобщенных функций из $\mathscr{S}'$, а другая – обобщенная функция с компактым носителем, или когда их носители ограничены с одной и той же стороны. Пример:

$$(\eta * \eta)(x) = \eta(x)x.$$

Если свертка определена, то

$$\partial_x(f * g) = (\partial_x f) \times g \equiv f * \partial_x g.$$

Мы рассматривали преобразование Фурье. Для основных функций оно имеет вид:

$$F[\phi](\xi) = \int dx\, e^{ix\xi}\phi(x), \qquad F^{-1}[\psi] = \frac{1}{2\pi}\int d\xi\, e^{-ix\xi}\psi(\xi).$$

Для обобщенных функций оно определяется как

$$(F[f](\xi), \psi(\xi)) = (f(x), F[\psi](x)).$$

Свойства преобразования Фурье:

- $\partial_\xi^n(F[f](\xi)) = F[(ix)^n f](\xi)$,
- $F[\partial_x^n f] = (-i\xi)^n F[f]$,
- $F[f(x-x_0)] = e^{ix_0\xi}F[f]$,
- $F[f](\xi+\xi_0) = F[e^{ix\xi_0}f](\xi)$,
- $F[f(x) \times g(x')] = F[f](\xi) \times F[g](\xi')$,
- $F[f * g] = F[f]F[g]$,

причем последнее выполняется только если свертка существует.

Примеры фурье-образов: $F[\delta] = 1$, $F[\eta](\xi) = \frac{i}{\xi+i0}$. Тогда, используя свертку, имеем, что существует произведение:

$$\frac{1}{\xi+i0}\frac{1}{\xi+i0} = \frac{1}{(\xi+i0)^2}$$

7.2. Обобщенные функции комплексного переменного. Обобщенная функция $1/z^n$, $n = 1, 2, \ldots$, в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{C})$ (распределение) определяется посредством равенств

$$\left(\frac{1}{z^n}, f\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|z|>\epsilon}\frac{d^2z}{z^n}f(z),$$

где $f \in \mathscr{S}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z^2}, f\right) &= \int\limits_{|z|>1}\frac{d^2z}{z^2}f(z) + \\ &\quad + \int\limits_{|z|<1}\frac{d^2z}{z^2}(f(z)-f(0)).\end{aligned}$$

Формулы Грина:

$$\begin{aligned} 2i\int\limits_D d^2z\ \partial_{\bar z} f(z) &= \oint\limits_{\partial D} dz\, f(z), \\ 2i\int\limits_D d^2z\ \partial_{z} f(z) &= -\oint\limits_{\partial D} d\bar z\, f(z) \end{aligned}$$

(область D находится слева от контура ∂D при интегрировании по нему).

Формула Коши–Грина:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D} dz'\,\frac{f(z')}{z-z'} + \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{d^2z}{z-z'}\,\partial_{\bar z'} f(z'),$$

для $z \in D \subset \mathbb{C}$ и $f(z) = 0$ в противном случае.

Выполнено асимптотическое равентство:

$$\frac{1}{z+\Delta} - \frac{1}{z} = -\frac{\Delta}{z^2} + \pi\overline{\Delta}\delta(z) + o(\Delta), \quad \Delta \to 0,$$

где $o(\Delta)$ означает обобщенную функцию, стремящуюся к нулю при $\Delta \to 0$.

Это равенство можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int d^2z \left(\frac{1}{z+\Delta} - \frac{1}{z}\right) f(z) = \int \frac{d^2z}{z}\,(f(z-\Delta) - f(z)) = \\ &= -\int \frac{d\bar z \wedge dz}{2i}\frac{1}{z}\left(\Delta\partial_z f(z) + \overline{\Delta}\partial_{\bar z} f(z)\right) + o(\Delta) = \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|>\epsilon}\frac{d^2z}{z}\left(\Delta\partial_z f(z) + \overline{\Delta}\partial_{\bar z} f(z)\right) + o(\Delta) = \\ &= -\Delta\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|>\epsilon}\frac{d^2z}{z}\partial_z f(z) - \overline{\Delta}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|>\epsilon}\frac{d^2z}{z}\partial_{\bar z} f(z) + o(\Delta) = \\ &= -\left(\frac{\Delta}{z^2}, f\right) + \overline{\Delta}\lim_{\epsilon\to 0}\oint\limits_{|z|=\epsilon}\frac{dz}{z}f(z) + o(\Delta) = \\ &= -\left(\frac{\Delta}{z^2}, f\right) + \overline{\Delta}\pi f(0) + o(\Delta). \end{aligned}$$

Тогда

$$\partial_{\bar z}\frac{1}{z} = \pi\delta(z)$$

8. Лекция 8. Фундаментальные решения и функции Грина

8.1. **Сведение начальной задачи к задаче с нулевыми начальными данными.** Пусть $u(t)$ кусочно n раз дифференцируемая (в обычном смысле) фунция. Пусть t_k, $k = 1, \ldots, N$ означают точки разрыва хотя бы одной из производных $u^{(m)}(t)$ и потребуем, чтобы в каждой такой точке существовали конечные левые и правые пределы всех производных, $u^{(m)}(t_k \pm 0)$. Обозначим обычную производную на интервалах ее существования $u_{\text{кл}}^{(m)}$ и разрывы производных в точках как

$$[u^{(m)}]_{t_k} = u^{(m)}(t_k + 0) - u^{(m)}(t_k - 0).$$

Тогда, как следует из одной из задач Листка 3,

$$u'(t) = u'_{\text{кл}}(t) + \sum_{k=1}^{N} [u]_{t_k} \delta(t - t_{t_k}),$$

так что

$$u''(t) = u''_{\text{кл}}(t) + \sum_{k=1}^{N} [u']_{t_k} \delta(t - t_{t_k}) + \sum_{k=1}^{N} [u]_{t_k} \delta'(t - t_{t_k}),$$

и продолжая, имеем:

$$u^{(m)}(t) = u_{\text{кл}}^{(m)}(t) + \sum_{m'=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{N} [u^{(m')}]_{t_k} \delta^{(m-m'-1)}(t - t_{t_k}).$$

Пусть требуется решить при $t > 0$ начальную задачу для уравнения с постоянными коэффициентами:

$$Lu(t) \equiv \sum_{m=0}^{M} a_m \frac{\partial^m u(t)}{\partial t^m} = f(t),$$
$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \ldots, u^{(M-1)}(0) = u_{M-1}.$$

Положим $\widetilde{u}(t) = u(t)\eta(t)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\widetilde{u}'(t) = u'(t)\eta(t) + u_0\delta(t), \\
&\widetilde{u}''(t) = u''(t)\eta(t) + u_1\delta(t) + u_0\delta'(t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\widetilde{u}^{(m)}(t) = u^{(m)}(t)\eta(t) + \sum_{m'=0}^{m-1} u_{m'} \delta^{(m-m'-1)}(t).
\end{aligned}$$

Таким образом, исходная задача свелась к задаче построения обобщенного решения уравнения

$$L\widetilde{u}(t) = f(t) + \sum_{m=1}^{M} a_m \sum_{m'=0}^{m-1} u_{m'} \delta^{(m-m'-1)}(t)$$

с носителем на интервале $[0, +\infty]$.

8.2. **Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.** Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$Lu(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\partial^n u(x)}{\partial t^x} = f(x)$$

в классе гладких дифференцируемых функций основано на свойстве преобразования Фурье:

$$F[\partial_x^n f] = (-ip)^n F[f],$$

где для основных и интегрируемых функций

$$F[\phi](p) = \int dx\, e^{ipx}\phi(x), \qquad F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi}\int dp\, e^{-ipx}\psi(p).$$

Применяя его к обоим частям дифференциального уравнения, получаем уравнение вида

$$P(p)F[u](p) = F[f](p),$$

где полином

$$P(p) = \sum_{n=0}^{N} a_n(-ip)^n.$$

Т.е. формально

$$F[u](p) = \frac{F[f](p)}{P(p)}.$$

Предположим, что такое деление возможно, т.е., что $P(p)$ не имеет вещественных нулей. Тогда, совершая обратное преобразование, получаем

$$u(x) = \int dyG(x-y)f(y),$$

где возникло фундаментальное решение оператора L:

$$G(x) = F^{-1}\left[\frac{1}{P(p)}\right](x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int \frac{dp\, e^{-ipx}}{P(p)},$$

так что

$$LG(x) = \delta(x).$$

Таким образом в данном случае фундаментальное решение существует и определено однозначно, поскольку однозначна процедура деления, в знаменателе нет нулей, так что интеграл существует и сходится. Собственно, то же самое верное и для большего числа измерений.

Рассмотрим более общий случай, когда у полинома $P(p)$ имеются вещественные нули, причем будем считать, что они простые. Как известно, всегда можно записать

$$P(p) = \prod_{n=1}^{N} a_N(-i)^N(p-q_n).$$

Пусть, скажем, q_1 вещественен. Тогда, во-первых, $1/P(p)$ сингулярен и следует выбрать как мы понимаем $1/(p-q_1)$: главное значение, или $1/(p-q_1+i0)$, или $1/(p-q_1-i0)$, или еще как-то. Но после этого возникает проблема неоднозначности – вспомнить задачу $xf(x) = 0$. Ну и так далее для всех вещественных корней полинома $P(p)$.

Пример: уравнение Штурма–Лиувилля с нулевым потенциалом:

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - k^2\psi(x) = f(x), \quad \text{где } k \neq 0 \text{ – вещественный параметр,}$$

так что

$$-\frac{d^2G(x)}{dx^2} - k^2G(x) = \delta(x).$$

Здесь

$$P(p) = p^2 - k^2$$

а потому

$$F[\psi](p) = \frac{F[f](p)}{(p-k)(p+k)}.$$

Конечно, нужно фиксировать выбор обобщенных функций и учесть неоднозначность деления. Положим

$$F[\psi](p) = \frac{F[f](p)}{(p-k+i0)(p+k+i0)} + c_-\delta(p-k) + c_+\delta(p+k), \tag{8.1}$$

где c_- и c_+ – неопределенные константы. Совершая обратное преобразование Фурье, получаем

$$\psi(x) = \int dy\, G(x-y,k)f(y) + c_- e^{-ikx} + c_+ e^{ikx},$$

$$G(x,k) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{dp\, e^{-ipx}}{(p-k+i0)(p+k+i0)}.$$

Вспоминая задачу 10 из Листка 4, имеем:

$$G(x,k) = \frac{1}{4k\pi}\int dp\, e^{-ipx}\left(\frac{1}{p-k+i0} - \frac{1}{p-k+i0}\right) = -\eta(x)\frac{\sin kx}{k}.$$

Произвол в выборе констант фиксируется граничными условиями, например,

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi_x(0) = 0,$$

что дает:

$$c_\pm = \frac{1}{2}\int dy\left[-G(-y,k) \pm \frac{i}{k}G_x(-y,k)\right]f(y).$$

Ответ так же можно записать в виде

$$\psi(x) = \int dy\, G_0(x,y,k)f(y)$$

где теперь $G_0(x,y,k)$ не есть функция разности:

$$G_0(x,y,k) = \big[\eta(-y) - \eta(x-y)\big]\frac{\sin k(x-y)}{k},$$

$$\psi(x) = \int\limits_0^x dy\, \frac{\sin k(x-y)}{k} f(y).$$

Для многомерных задач ситуация сложнее. В частности, мы имеем для оператора Лапласа:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)G(x,y) = \delta(x)\delta(y)$$

что с учетом обозначений

$$z = x+iy, \qquad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$

переписывается в виде

$$\partial_z\overline{\partial_z}g(z) = \frac{1}{4}\delta(z), \quad \text{где} \quad g(z) = G(x,y).$$

В задачах мы имели, что $\partial_z \ln|z|^2 = 1/z$ и $\overline{\partial_z}1/z = \pi\delta(z)$. Так что

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\ln(x^2+y^2).$$

Найдем фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \qquad (a>0)$$

т.е., решение уравнения

$$\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2} = \delta(t,x).$$

Применим, например, к последнему уравнению преобразование Фурье по переменной x:

$$\frac{\partial^2 G(t,k)}{\partial t^2} - a^2k^2 G(t,k) = \delta(t).$$

При фиксированном k соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение по t было рассмотрено выше; одно из его фундаментальных решений имеет вид

$$G(t,k) = \eta(t)\frac{\sin akt}{ak}$$

Фундаментальное решение волнового уравнения получаем применением к $G(t,k)$ обратного преобразования Фурье. Ответ:

$$G(t,x) = \frac{1}{2a}\eta(at - |x|).$$

Проверим, вычислив преобразование Фурье по x от $G(t,x)$. Поскольку речь идет об обычных локально интегрируемых функциях, достаточно вычислить интеграл

$$F_x[G(t,x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}G(t,x)dx = \int_{|x|<at} e^{ikx}dx = \left\{\begin{array}{cc} 0, & t<0, \\ \dfrac{\sin akt}{ak}, & t>0. \end{array}\right.$$

Решим с помощью полученного фундаментального решения задачу Коши для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \qquad t>0$$
$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x)$$

Эта задача эквивалентна одному уравнению на обобщенную функцию $v(t,x) = \eta(t)u(t,x)$, сосредоточенную в полуплоскости $t>0$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(t,x)\eta(t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t).$$

В самом деле, производная $\frac{\partial v}{\partial t}$ в смысле обобщенных функций равна

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\eta(t) + u(t)\eta_t'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}\eta(t) + u_0(x)\delta(t),$$

аналогично $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\eta(t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)$.

Поэтому $v(t,x) = G(t,x) * (f(t,x)\eta(t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t))$ и при $t>0$

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, \eta(t-s-|x-y|)\left(f(s,y)\eta(s) + u_0(y)\delta'(s) + u_1(y)\delta(s)\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^t ds \int\limits_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} dy f(s,y) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} dy u_1(y) + \frac{1}{2}\left(u_0(x-at) + u_0(x+at)\right)$$

(формула Даламбера).

Обсудим вкратце соотношение между преобразованиями Фурье и Лапласа. Пусть $f(t)$ - локально интегрируемая функция, растущая не быстрее полинома, равная нулю при отрицательных t (в частности, $f(t) \in \mathscr{S}'$ - обобщенная функция умеренного роста, сосредоточенная на положительной полуоси). Тогда ее преобразование Лапласа $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ аналитично в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > 0$ и является аналитическим продолжением преобразования Фурье $F[f](k) = \int_0^\infty e^{ikt}f(t)dt$ при соответствии $k = ip$.

Поэтому для решения задач Коши с положительным временем в обыкновенных дифференциальных уравнениях можно использовать оба преобразования, однако в этом случае преобразование Лапласа сразу же аппелирует к аппарату ТФКП (и применимо к более широкому классу функций с экспоненциальным ростом). В иных задачах, использующих поведение решений при $t < 0$ (тем более в многомерных задачах) приходится ограничиваться преобразованием Фурье.

С другой стороны, всякую обобщенную функцию $f(t) \in \mathscr{S}$ можно разложить в разность (или сумму) $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$ функций с носителями на положительной и отрицательной полуосях соответственно. Например, если $f(t)$ – локально интегрируемая функция, растущая не быстрее полинома, то $f_+(t) = f(t)\eta(t)$, $f_-(t) = -f(t)\eta(-t)$. Тогда преобразование Фурье $F[f(t)](k)$ есть сумма $F_+(k) = F[f_+(t)](k)$ и $F_-(k) = F[f_-(t)](k)$,

$$F(k) = F_+(k) - F_-(k), \tag{8.2}$$

где функции $F_\pm(k)$ имеют вид преобразований Лапласа функций $f_\pm(t)$ при соответствии $k = \pm ip$ и являются аналитическими функциями в верхней, соответственно, нижней полуплоскостям. Таким образом, разложение (8.2) – это аналитическое представление преобразования Фурье обобщенной функции, осуществляемое двумя преобразованиями Лапласа.

8.3. **Сведение начальной задачи к интегральному уравнению.** Рассмотрим опять уравнение Штурма–Лиувилля с ненулевым потенциалом (одномерное уравнение Шредингера):

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + u(x)\psi(x) = k^2\psi(x), \quad \text{где } k \neq 0 \text{ – вещественный параметр,}$$

и нулевой "правой частью". Преобразование Фурье в такой ситуации приносит мало пользы, поскольку вместо $u(x)\psi(x)$ мы получим свертку. Однако функция Грина позволяет свести дифференциальное уравнение с начальными данными к интегральному, что дает возможность исследовать свойства решений. Положим в предыдущих формулах $f(x) = -u(x)\psi(x)$, тогда $\psi(x)$ удовлетворяет

$$\psi(x) = c_- e^{-ikx} + c_+ e^{ikx} - \int_{-\infty}^{x} dy\, \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\psi(y).$$

Опять константы фиксируруются начальными условиями. Предположим, что $u(x)$ – гладкая, быстро убывающая на бесконечности функция (например, из $\mathscr{S}$). Тогда естественно ожидать, что на бесконечности $\psi(x)$ ведет себя как решение уравнения с $u(x) = 0$. Обозначим $\psi(x,k) \sim e^{-ikx}$ при $x \to -\infty$, точнее, зададим решение $\psi(x,k)$ условием

$$\lim_{x\to-\infty} e^{ikx}\psi(x,k) = 1.$$

Перепишем интегральное уравнение в виде

$$e^{ikx}\psi(x) = c_- + c_+ e^{2ikx} + \int_{-\infty}^{x} dy\, \frac{1 - e^{2ik(x-y)}}{k} u(y) e^{iky}\psi(y),$$

т.е. как интегральное уравнение на $e^{ikx}\psi(x)$. Условие на асимптотике дает $c_- = 1$, $c_+ = 0$. Итак,

$$\psi(x) = e^{-ikx} - \int_{-\infty}^{x} dy\, \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\psi(y),$$

$$e^{ikx}\psi(x) = 1 + \int_{-\infty}^{x} dy\, \frac{1 - e^{2ik(x-y)}}{k} u(y) e^{iky}\psi(y).$$

Мы получили однозначное уравнение, доказательство существования решения которого уже можно проводить, скажем методом последовательных приближений. Вторая версия этого уравнения позволяет доказать, что $\psi(x,k)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость параметра k. Решение Йоста.

9. Лекция 9. Асимптотические методы

9.1. **Постановка задачи.** . Рассмотрим несобственный интеграл $G(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ как функцию параметра x. Заменяя под знаком интеграла $(1+t)^{-1}$ на соответствующий ряд Тэйлора, приходим к выражению

$$G(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \int_0^\infty e^{-xt}t^n dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \int_0^\infty e^{-xt}\frac{(xt)^n}{x^{n+1}}d(xt) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} =$$
$$= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Получили ряд, расходящийся при любом x, отличном от нуля, что говорит о неправомерности приведенных рассуждений. Этого можно было ожидать, поскольку используемое разложение имеет место не на всем промежутке интегрирования. Повторим те же вычисления с конечной частью ряда Тэйлора функции $(1+t)^{-1}$. По формуле суммы геометрической прогресии

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n\frac{t^n}{1+t},$$

поэтому

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^\infty e^{-tx}t^k dt + (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} + (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}dt$$

Последнее слагаемое

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}dt$$

представляет собой ошибку приближения функции $G(x)$ конечным рядом $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$. Нетрудно видеть, что при $\operatorname{Re} x = a > 0$

$$|R_n(x)| < \int_0^\infty t^n e^{-at}dt = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

В частности, если x – действительное положительное число, что мы и предположим далее для простоты изложения, то $|R_n(x)| < \frac{n!}{x^{n+1}}$ и этот остаток имеет знак $(-1)^n$.

Изучим поведение ошибки в зависимости от n и x.

а) Фиксируем n. Тогда с ростом x остаток $R_n(x)$ стремится к нулю.

б) Фиксируем x. Ошибка уменьшается с ростом n, пока n не превосходит целой части $[x]$ числа x. Затем ошибка $R_n(x)$ начинает расти. В самом деле, $\dfrac{n!}{x^{n+1}} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{2}{x}\cdots\dfrac{n}{x}$, и при $n > x$ каждый множитель, начиная с $[x]+1$-го, больше единицы.

Таким образом, любое численное приближение интеграла имеет ошибку, не меньшую $\varepsilon(x) = \dfrac{[x]!}{x^{[x]}}$. Она весьма мала при больших x. Например, при $x = 10$ ошибка $\varepsilon \sim 10^{-3}$, а при $x = 100$ ошибка $\varepsilon \sim 10^{-40}$, что говорит о том, что приближения получаются очень хорошими, несмотря на неустранимые ошибки.

Приведенный способ вычислений был аксиоматизирован А.Пуанкаре в 1890 г.

9.2. **Подход Пуанкаре.** *Определение*. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in \bar{D}$ - предельная точка D. Последовательность функций $\varphi_n(z)$, $n \geq 1$, $z \in D$ называется асимптотической последовательностью при $z \to z_0$ в D, если все $\varphi_n(z)$ определены в D и для всякого $n \geq 1$ $\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z))$ при $z \to z_0$.

Пусть $\{\varphi_n(z)\}$ - асимптотическая последовательность. Ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n\varphi_n(z)$ называется асимптотическим разложением функции $f(z)$ при $z \to z_0$ в D, $f(z) \sim \sum\limits_{n\geq 1} a_n\varphi_n(z)$, если для всякого

$n \geq 1$ выполнено соотношение

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(z) = o(\varphi_n(z)), \quad z \to z_0, \quad z \in D.$$

Напомним символику бесконечно малых.

1. $f(z) \sim g(z)$ при $z \to z_0$, $z \in D$ означает, что $\lim\limits_{z \to z_0, z \in D} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 1$.

2. $f(z) = o(g(z))$ при $z \to z_0$, $z \in D$ означает, что $\lim\limits_{z \to z_0, z \in D} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 0$.

3. $f(z) = O(g(z))$ при $z \to z_0$, $z \in D$ означает, что $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ ограничено в пересечении некоторой окрестности z_0 с D.

Например, функция $\operatorname{th} z$ есть $o(1)$ при $z \to \infty$, $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2} - \delta$. В самом деле,

$$\operatorname{th} z = \frac{1 - e^{-2z}}{1 + e^{-2z}}$$

и при $|z| > R$ с учетом $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2} - \delta$ верно неравенство $\operatorname{Re} z > |z|/\sin\delta$. Поэтому при стремлении z к бесконечности в указанной области $\operatorname{Re} z$ также стремится к бесконечности; соответственно, $|e^{-z}|$ стремится к нулю.

Однако, это не так в области $\operatorname{Re} z > 0$, поскольку в этом случае при стремлении z к бесконечности $\operatorname{Re} z$ может сколь угодно мало отличаться от нуля, так что $|e^{-z}|$ к нулю не стремится.

Наиболее часто используются степенные асимптотические последовательности, например, $\varphi_n(z) = z^n$ при $z_0 = 0$ или $\varphi_n(z) = z^{-n}$ при $z_0 = \infty$. Если функция $f(z)$ имеет асимптотическое разложение по заданной системе функций, то его коэффициенты единственны. В самом деле, из определения имеем при $z \to z_0$, $z \in D$

$$f(z) - a_1\varphi_1(z) = o(\varphi_1(z)), \qquad \text{откуда} \quad a_1 = \lim_{z \to z_0,\, z \in D} \frac{f(z)}{\varphi_1(z)},$$

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(z) = o(\varphi_n(z)), \qquad \text{откуда} \quad a_n = \lim_{z \to z_0,\, z \in D} \frac{f(z) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(z)}{\varphi_n(z)}$$

Можно также заметить, что при наличии асимптотического разложения выполнена более точная оценка ошибки:

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(z) = O(\varphi_{n+1}(z))$$

при $z \to z_0$ и $z \in D$, что можно использовать как другой вариант определения.

С другой стороны, функция не определяется своим асимптотическим разложением; различные функции могут иметь одно и тоже асимптотическое разложение. Например, функция $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ имеет нулевое асимптотическое разложение в нуле по степеням z,

$$e^{-\frac{1}{z^2}} \sim 0 + 0 \cdot z + ... + 0 \cdot z^n + ... \qquad z \to 0$$

поскольку убывает при $z \to 0$ быстрее любой степени z.

Формула Тэйлора с остаточным членом в форме Пеано,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + o(z^{n+1})$$

говорит, что всякая функция, бесконечно дифференциируемая в нуле, имеет свой ряд Тэйлора в качестве асимптотического разложения (вне зависимости от его сходимости). Однако, понятие асимптотического разложения шире формулы Тэйлора: во-первых, можно брать иные асимптотические последовательности, например,

$$\varphi_1(z) = z^{-2}, \varphi_2(z) = z^{-1}, \ldots, \varphi_n(z) = z^{n-3}, ..., \qquad z_0 = 0.$$

Тогда фунции, допускающие асимптотическое разложение по этой системе, могут стремиться к ∞ при $z \to 0$ и тем самым не иметь никаких производных в нуле. Во-вторых, как правило, асимптотические разложения рассматриваются в секторах или полуплоскостях типа $\operatorname{Re} z > 0$ и не контролируют поведение функции вне этих секторов.

9.3. **Приближенное нахождение нулей трансцендентных уравнений.** *Пример.* Трансцендентное уравнение $x \sin x = 1$ имеет бесконечно много корней. При больших x n-ный корень ведет себя как $x = \pi n + o(1)$. Уточним его поведение. Положим $x = \pi n + \alpha_n$, где $\alpha_n = o(1)$ и подставим это выражение в соотношение $\sin x = x^{-1}$. Пользуясь рядами Тейлора для функций $\sin x$ и $(1+x)^{-1}$, получаем:

$$\sin x = (-1)^n \left(\alpha_n + o(\alpha_n)\right) = \frac{1}{\pi n + \alpha_n} = \frac{1}{\pi n \left(1 + \alpha_n/\pi n\right)} = \frac{1}{\pi n}\left(1 - \frac{\alpha_n}{\pi n} + o\left(\frac{\alpha_n}{\pi n}\right)\right).$$

Правая часть имеет вид

$$\frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

поэтому, глядя на левую часть, заключаем, что $\alpha_n = (-1)^n/(\pi n) + \beta_n$, где $\beta_n = o(1/n)$. Подставим вновь полученное выражение в предыдущее равенство, воспользовавшись следующим членом в ряде Тэйлора для синуса, получим

$$(-1)^n \left((-1)^n \frac{1}{\pi n} - (-1)^n \frac{1}{6(\pi n)^3} + \beta_n + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{\pi n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

откуда получаем, что $\beta_n = -\dfrac{1}{6(\pi n)^3} - \dfrac{(-1)^n}{(\pi n)^3} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, так что

$$x = \pi n + (-1)^n \frac{1}{\pi n} - \frac{1}{6(\pi n)^3} - \frac{(-1)^n}{(\pi n)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Итерируя процесс, можем получить полное асимптотичское разложение корня по n.

9.4. **Оценка интеграла интегрированием по частям.** Другой пример асимптотического разложения предоставляет оценка интеграла интегрированием по частям. Рассмотрим, например, интеграл Френеля $F(x) = \int\limits_x^\infty \cos u^2 du$ как функцию нижнего предела. Сделаем замену переменных и проинтегрируем по частям:

$$F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{x^2}^{\infty} t^{-1/2}\cos t dt = \frac{1}{2}\int\limits_{x^2}^{\infty} t^{-1/2} d\sin t = \frac{1}{2} t^{-1/2}\sin t\Big|_{x^2}^{\infty} + \frac{1}{4}\int\limits_{x^2}^{\infty} t^{-3/2}\sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_{x^2}^{\infty} t^{-3/2} d\cos t\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2}\frac{\cos x^2}{x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\int\limits_{x^2}^{\infty} t^{-5/2}\cos t dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2}\frac{\cos x^2}{x^3} + \ldots + \frac{(-1)^n(4n-1)!!}{2^{2n}}\frac{\sin x^2}{x^{4n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)!!}{2^{2n+1}}\frac{\cos x^2}{x^{4n+3}} + R_n\right),$$

где $R_n = \dfrac{(-1)^n(4n+5)!!}{2^{2n+2}}\displaystyle\int\limits_{x^2}^{\infty} t^{-\left(2n+\frac{5}{2}\right)}\cos t dt$. Оценим последний интеграл, заменив $\cos t$ на 1:

$$\left|\int\limits_{x^2}^{\infty} t^{-\left(2n+\frac{5}{2}\right)}\cos t dt\right| < \int\limits_{x^2}^{\infty} t^{-\left(2n+\frac{5}{2}\right)} dt = \frac{2}{4n+3}\frac{1}{x^{4n+3}}.$$

В этой оценке остаток имеет порядок последнего слагаемого рассмотренного пртближения интеграла Френеля $F(x)$. Объединив теперь R_n с этим последним слагаемым, получим оценку

$$F(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2}\frac{\cos x^2}{x^3} + \ldots + \frac{(-1)^n(4n-1)!!}{2^{2n}}\frac{\sin x^2}{x^{4n+1}}\right) + O\left(\frac{1}{x^{4n+3}}\right),$$

которая означает, что при $x \to +\infty$ функция $F(x)$ допускает асимптотическое разложение вида

$$F(x) \sim \sin x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-4n-1}\right) + \cos x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-4n-3}\right),$$

которое обычно записывают в виде

$$F(x) \sim -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{-2n-1} \sin\left(x^2 - n\frac{\pi}{2}\right).$$

10. Лекция 10. Интегралы Лапласа

10.1. **Вариации определения Пуанкаре.** На прошлой лекции рассматривалось асимптотическое разложение интеграла Френеля $F(x) = \int\limits_x^\infty \cos u^2 du$ по системе функций

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x^{2n+1}}, & n = 2k, \\ \dfrac{\cos x^2}{x^{2n+1}}, & n = 2k+1 \end{cases}, \quad n \geq 0, \ x \to +\infty$$

Формально система функций $f_n(x)$ не является асимптотической последовательностью при $x \to +\infty$ в смысле Пуанкаре, поскольку отношение $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ равно либо $x^{-2}\operatorname{tg} x^2$, либо $x^{-2}\operatorname{ctg} x^2$ в зависимости от четности n и не имеет за счет тригонометрических множителей предела при $x \to +\infty$. Однако, разложение дает хорошую степенную оценку остатка порядка x^{-2n-2} и вполне может быть использовано для приближенных вычислений и асимптотичекого анализа. Для работы с такими разложениями определение Пуакаре можно модифицировать двумя способами (и оба они используются!).

1-ый способ. Разрешим переменные коэффициенты асимптотического разложения, наложив лишь условие их ограниченности в окрестности предельной точки. Иными словами, для асимптотической последовательности $f_n(x)$, $x \to x_0$, $x \in D$, будем рассматривать приближения вида

$$f(x) = a_1(x) f_1(x) + \cdots + a_n(x) f_n(x) + o(f_n(x)),$$

где каждый коэффициент $a_k(x)$ ограничен в некоторой окрестности точки x_0. В нашем примере $x_0 = +\infty$, $D = \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = x^{-2n-1}$, $a_n(x)$ есть линейная комбинация $\cos x^2$ и $\sin x^2$. Соответствующий смысл вкладывается и в асимптотическое разложение

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) f_k(x), \qquad , x \to x_0, \ x \in D.$$

2-ой способ. Можно допустить <u>составные</u> асимптотические разложения (с постоянными коэффициентами) вида

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k g_k(x), \qquad , x \to x_0, \ x \in D,$$

где $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ – разные асимптотические последовательности. В нашем примере

$$f_n(x) = \frac{\sin x^2}{x^n}, \qquad g_n(x) = \frac{\cos x^2}{x^n}.$$

Этот подход, помимо прочего, позволяет увеличивать область применимости асимптотического разложения.

10.2. **Асимптотика интеграла Лапласа.** Пусть $f(t)$ – функция действительного аргумента $t > 0$ такая, что интеграл

$$F(x) = \int_0^\infty f(t) e^{-xt} dt \tag{10.1}$$

(преобразование Лапласа функции $f(t)$) абсолютно сходится при больших действительных $x > 0$. Для этого достаточно потребовать, например, существования конечного интеграла $\int_0^\infty |f(t)| e^{-x_0 t} dt = M$ для некоторого $x_0 > 0$.

Все асимптотические свойства интеграла Лапласа (10.1) основаны на следующей оценке:

Лемма Ватсона. Пусть функция $f(t)$ такова, что

а) интеграл $\int_0^\infty |f(t)| e^{-x_0 t} dt = M$ конечен для некоторого $x_0 > 0$;
б) $f(t) = O(t^a)$ при $t \to 0$ для некоторого $a > -1$.

Тогда $\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = O\left(\frac{1}{x^{a+1}}\right)$ при $x \to \infty$, $\operatorname{Re} x > 0$ (более точно: если x стремится к бесконечности, оставаясь внутри некоторого сектора $-\frac{\pi}{2}+\delta < \arg x < \frac{\pi}{2}-\delta$, $\delta > 0$).

Доказательство. Разобьем интеграл на две части:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = \int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt + \int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt,$$

где ε - произвольное малое положительное число. Оценим вначале второй интеграл при $\operatorname{Re} x > x_0$:

$$\left|\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt\right| = \left|\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-x_0 t}e^{-(x-x_0)t}dt\right| < M|e^{-(x-x_0)\varepsilon}| = Me^{-\operatorname{Re}(x-x_0)\varepsilon} = \widetilde{M}e^{-\varepsilon \operatorname{Re} x},$$

где $\widetilde{M} = Me^{-\operatorname{Re} x_0}$. Если x стремится к бесконечности внутри указанного сектора, то при фиксированном ε интеграл $e^{-\varepsilon \operatorname{Re} x}$ стремится к нулю быстрее любой степени x, т.е., $\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt = o(x^{-n})$ для всех n.

В первом интеграле для достаточно малого ε мы можем воспользоваться оценкой $|f(t)| < Ct^a$ для некоторого $C > 0$, так что

$$\left|\int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt\right| < C\int_0^\varepsilon t^a e^{-\sigma t}dt,$$

где $\sigma = \operatorname{Re} x$. Увеличим в последнем интеграле интервал интегрирования до бесконечного

$$\left|\int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt\right| < C\int_0^\infty t^a e^{-\sigma t}dt = \frac{C}{\sigma^{a+1}}\int_0^\infty (\sigma t)^a e^{-\sigma t}d\sigma t = C\frac{\Gamma(a+1)}{\sigma^{a+1}}$$
$$= O\left(\frac{1}{\sigma^{a+1}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{a+1}}\right),$$

если $x \to \infty$, оставаясь в секторе $-\frac{\pi}{2}+\delta < \arg x < \frac{\pi}{2}-\delta$.

Из леммы Ватсона следует, что если функция $f(t)$ такова, что $|f(t)| < e^{x_0 t}$ при больших t и $f(t) = a_1 t^{\alpha_1} + \cdots a_n t^{\alpha_n} + O(t^{\alpha_{n+1}})$ при $t \to 0$ и некоторых $a_1, ..., a_n$ и вещественных $\alpha_1, ...\alpha_{n+1}$, таких, что $-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{n+1}$, то

$$\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = a_1\frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{x^{\alpha_1+1}} + \cdots + a_n\frac{\Gamma(\alpha_n+1)}{x^{\alpha_n+1}} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha_{n+1}+1}}\right).$$

Например, для функции $f(t)$, растущей на бесконечности не быстрее некоторой экспоненты и имеющей в нуле асимптотическое разложение

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^\infty a_k t^k, \qquad t \to 0,$$

ее преобразование Лапласа $F(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt$ имеет асимптотическое разложение в описанном выше секторе

$$F(x) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{k! a_k}{x^{k+1}}, \qquad x \to \infty.$$

Заметим, что все рассуждения и результаты остаются верными и для всякого конечного интеграла $\int_0^b f(t)e^{-xt}dt$ – бесконечный отрезок интегрирования, отделенный от нуля, каждый раз дает экспоненциально малый вклад.

Подобным же образом оцениваются интегралы вида

$$I(x) = \int_0^\infty g(t)e^{x\varphi(t)}dt,$$

где $\varphi(t)$ - монотонно убывающая от 0 к $-\infty$ вещественнозначная функция. А именно, сделаем в интеграле замену переменных $t = -\psi(\tau)$, где $t = \psi(\tau)$ – функция, обратная к $\tau = \varphi(t)$:

$$I(x) = \int_0^\infty g(\psi(\tau))e^{-x\tau}d(-\psi(\tau)) = -\int_0^\infty g(\psi(\tau))\psi'(\tau)e^{-x\tau}d\tau.$$

Таким образом, задача сводится к оценке интеграла Лапласа $I(x) = -\int_0^\infty f(\tau)e^{-x\tau}d\tau$, где $f(\tau) = g(\psi(\tau))\frac{d\psi(\tau))}{d\tau}$. Если обе функции $g(t)$ и $\varphi(t)$ имеют асимптотические разложения в нуле,

$$\varphi(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k, \qquad g(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \qquad t \to 0,$$

то и функция $f(\tau)$ имеет асимптотическое разложение в нуле $f(\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^k$, коэффициенты которого находятся реккурентно (для этого фактически требуется обращение первого ряда):

$$c_0 = b_0 a_1^{-1},\ c_1 = b_1 a_1^{-2} - 2a_2 b_0 a_1^{-4},\ \ldots$$

и определяют коэффициенты асимптотического разложения интеграла $I(x)$. Как и раньше, те же оценки верны и для интеграла с конечным верхним пределом.

10.3. **Интегралы гауссова типа.** Пусть $f(t)$ - функция такая, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt^2}dt$ абсолютно сходится при больших x. Преобразование

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt^2}dt = \int_0^{+\infty} (f(t) + f(-t))e^{-xt^2}dt$$

и последующая замена переменных $t = \sqrt{\tau}$ также сводят этот интеграл к интегралу Лапласа

$$\int_0^{+\infty} (f(\sqrt{\tau}) + f(-\sqrt{\tau}))e^{-x\tau}\frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}}$$

Таким образом, если функция $f(t)$ имеет в нуле асимптотическую оценку

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n} a_k t^k + O(t^{2n+1}),$$

то подинтегральная функция в последнем интеграле оценивается как

$$\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{2}(f(\tau^{\frac{1}{2}}) + f(-\tau^{\frac{1}{2}})) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}\tau^{k-\frac{1}{2}} + O\left(\tau^{n+\frac{1}{2}}\right),$$

так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt^2}dt = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{x^{k+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{x^{k+\frac{3}{2}}}\right).$$

Как и раньше, эта же оценка верна для интеграла по любому интервалу, содержащему 0.

10.4. **Метод перевала. Вещественная версия.** Метод перевала в простейшей версии описывает асимптотическое вычисление интеграла $I(x) = \int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt$, где $\varphi(t)$ имеет единственный максимум во внутренней точке $t_0 \in (a, b)$. Имеем

$$\int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt = \int_a^b g(t)e^{x\varphi(t_0)+x(\varphi(t)-\varphi(t_0))}dt = e^{x\varphi(t_0)}\int_a^b g(t)e^{x(\varphi(t)-\varphi(t_0))}dt.$$

Сделаем замену переменных $t = \psi(\tau)$, обращающую соотношение $\varphi(t) - \varphi(t_0) = -\tau^2$:

$$\int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt = \int_{\psi(\tau)=a}^{\psi(\tau)=b} f(\tau)e^{-x\tau^2}d\tau,$$

где $f(\tau) = g(\psi(\tau))\psi'(\tau)$. Следовательно, частное $I(x)/e^{x\varphi(t_0)}$ имеет асимптотическое разложение при $x \to +\infty$:

$$\int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt \sim e^{x\varphi(t_0)}\left(\sum_{k\geq 0}^{n} c_{2k}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{x^{n+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{x^{n+\frac{3}{2}}}\right)\right),$$

где c_n - коэффициенты асимптотического разложения $f(\tau)$ в нуле, вычисляемые реккурентно по коэффициентам асимпотических разложений $g(t)$ и $\varphi(t)$ в окрестности точки $t = t_0$.

Можно также заметить, что все аргументы работают и для комплекснозначной функции $\varphi(t)$ с единственной критической точкой $t = t_0$ внутри интервала, в которой $\varphi'(t_0) = 0$ и действительная часть $\varphi(t_0)$ имеет локальный максимум. В этом случае асимптотическое разложение имеет место при $x \to \infty$ и $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$.

10.5. **Формула Стирлинга.** Для исследования асимптотики $\Gamma(x)$ при больших положительных x чуть более удобно представить $\Gamma(x)$ в виде

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^x d\tau = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\tau + x\log\tau} d\tau.$$

Подинтегральная функция обращается в ноль на концах интервала интегрирования и имеет максимум в точке $\tau = x$, где $(-\tau + x\log\tau)' = -1 + x/\tau = 0$. Сдвинем точку макимума в 0 заменой переменных $\tau = (t+1)x$. Получим

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x-tx+x\log(t+1)x} x dt = x^x e^{-x}\int_{-1}^\infty e^{x(-t+\log(t+1))} dt,$$

так что

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \int_{-1}^\infty e^{xp(t)} dt, \qquad p(t) = -t + \log(t+1)$$

где функция $p(t)$ имеет единственный экстремум с максимумом действительной части в точке 0. К этому интегралу применим метод перевала:

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \int_{-\infty}^\infty e^{-x\tau^2}\psi'(\tau) d\tau,$$

где $t = \psi(\tau)$ есть решение уравнения $t - \log(t+1) = \tau^2$. Для нахождения асимтотического разложения этого интеграла необходимо найти асимптотическое разложение функции $t = \psi(\tau)$ в нуле. Пусть $t = \psi(\tau) = a_1\tau + a_2\tau^2 + ... + a_n\tau^n + O(\tau^{n+1})$. Найдем первые члены разложения:

$$t - \log(1+t) = t - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + O(t^4) = \frac{1}{2}(a_1\tau + a_2\tau^2 + O(\tau^3))^2 - \frac{1}{3}(a_1\tau + O(\tau^2))^3 = \tau,$$

откуда $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Аналогично $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{18}$. Отсюда $\psi'(\tau) = \sqrt{2} + \frac{4}{3}\tau + \sqrt{2}6\tau^2 + O(\tau^3)$. Итак, при $x \to \infty$ и $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \sum_{k=0}^n c_{2k}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{x^{k+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{x^{n+1+\frac{1}{2}}}\right),$$

где $c_0 = \sqrt{2}$, $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}$, т.е.,

$$\Gamma(x) = x^x e^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Общая формула коэффициентов асимптотического разложения $\Gamma(x)$ неизвестна.

Литература к лекциям 9-10:

А.Эрдейи, Асимптотические разложения, Главы 1-2,
Е.Копсон, Асимптотические разложения, Главы 1-6.,
Ф.Олвер, Асимптотика и специальные функции, Главы 1,3.,
М.В.Федорюк, Метод перевала.

11. Лекция 11. Асимптотики интегралов Фурье

11.1. **Осциллирующие интегралы.** Мы рассматриваем теперь интегралы вида

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{ixt}\varphi(t).$$

Здесь, в отличие от интегралов Лапласа, другая причина убывания на бесконечности – осцилляции, т.е. условная сходимость. Основной здесь является следующая лемма.

Лемма Римана–Лебега. Рассмотрим интеграл

$$F(x) = \int_a^b dt\, e^{ixt}\varphi(t),$$

где a и b конечны, или бесконечны. Пусть

а) $\varphi(t)$ кусочно непрерывная

б) б) в случае несобственного интеграла $F(x)$ сходится он равномерно по x (например $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема)

Тогда $F(x) = o(1)$ при $|x| \to \infty$, т.е. $\lim_{|x|\to\infty} F(x) = 0$.

Доказательство проведем для случая конечного интервала. Тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$ и для любого ϵ существует разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, такое что $|\varphi(t) - \varphi(t_m)| < \epsilon$ внутри каждого отрезка разбиения. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt\, e^{ixt}\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt\, e^{ixt}\varphi(t_k) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt\, e^{ixt}[\varphi(t) - \varphi(t_{t_k})]}_{<(b-a)\epsilon} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k)\frac{e^{ixt_k} - e^{-ixt_{k-1}}}{ix} + (b-a)\epsilon < \frac{Mn}{|x|} + (b-a)\epsilon,$$

так что оба члена могут быть сделаны сколь угодно малыми при больших $|x|$. ■

Замечание. Интеграл $\int_0^\infty dt\, t^{-\sigma}e^{itx}$, $-1 < \sigma < 0$, сходится по t не абсолютно, но равномерно по x при $|x| \to \infty$, так что лемма Римана–Лебега к нему применима.

Следствие 1. Пусть $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема n раз. Тогда

$$F(x) = e^{ibx}\left(\frac{\varphi(b)}{ix} - \frac{\varphi'(b)}{(ix)^2} + \frac{\varphi''(b)}{(ix)^3} - \cdots + (-1)^n\frac{\varphi^{(n-1)}(b)}{(ix)^n}\right) -$$

$$- e^{iax}\left(\frac{\varphi(a)}{ix} - \frac{\varphi'(a)}{(ix)^2} + \frac{\varphi''(a)}{(ix)^3} - \cdots + (-1)^n\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(ix)^n}\right) + o(x^{-n})$$

Доказательство проводится интегрированием по частям.

$$F(x) = \int_a^b dt\, e^{ixt}\varphi(t) = \frac{e^{ixt}\varphi(t)}{ix}\bigg|_{t=a}^{b} - \int_a^b dt\, e^{ixt}\frac{\varphi'(t)}{ix},$$

где последний член имеет порядок x^{-1} в силу леммы. И так далее.

Следствие 2. Пусть $a = 0$, $b = \infty$, $\varphi \in \mathscr{S}$ (впрочем, достаточно простого убывания вмемте со всеми производными). Тогда

$$F(x) = \int_0^\infty dt\, e^{ixt}\varphi(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0)\left(\frac{i}{x}\right)^{k+1}, \quad |x| \to \infty.$$

Сравним с интегралом Лапласа:

$$F(z) = \int\limits_0^\infty dt\, e^{-zt}\varphi(t) \sim \sum_{k=0}^\infty \varphi^{(k)}(0)\left(\frac{1}{z}\right)^{k+1}$$

где $z \to \infty$ так, что $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2} - \delta$. Подставляя $z = -ix = \dfrac{x}{i}$, видим что асимптотическое разложение интеграла Фурье является аналитическим продолжением асимптотического разложения соответствующего интеграла Лапласа на область $|\arg z| \le \frac{\pi}{2}$.

Пример.

$$\int\limits_0^\infty dt\, \frac{e^{itx}}{1+t} \sim (-1)^n n! \left(\frac{i}{x}\right)^{n+1}, \quad |x| \to \infty,$$

$$\int\limits_0^\infty dt\, \frac{e^{-tz}}{1+t} \sim (-1)^n n! \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}, \quad |\arg z| \le \frac{\pi}{2} \to \infty,$$

на самом деле даже $< \pi - \delta$

Вопрос. Асимптотика интеграла Лапласа возможна и по нецелым степеням. Как обобщить на интеграл Фурье?

Ответ. Обобщается для убывающих функций. В преобразовании Лапласа для этого нужно было, в частности, вычислить

$$\int\limits_0^\infty dt\, t^\alpha e^{-pt} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1,$$

а здесь нам нужен интеграл

$$\int\limits_0^\infty dt\, t^\alpha e^{itx} = e^{i\pi(\alpha+1)/2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}, \quad -1 < \alpha < 0,$$

чтобы обеспечить сходимость на бесконечности. Доказательство:

$$\int\limits_0^\infty dt\, t^\alpha e^{-tx} = \int\limits_0^{i\infty} dt\, t^\alpha e^{-tx} =$$

где мы воспользовались тем, что в первом квадранте вклад по четверти большого круга дает в пределе ноль. Таким образом во втором интеграле t – чисто мнимо и $0 < t < i\infty$, точнее $0 < it < \infty$. Тогда

$$= \int\limits_0^\infty \frac{d(-it)}{-i}(-it)^\alpha e^{itx} = e^{-i\pi(\alpha+1)/2}\int\limits_0^\infty dt\, e^{ixt} t^\alpha.$$

Проблема в том, что мы умеем только интегрировать по частям осциллирующе интегралы, и не умеем отщеплять, как в интеграле Лапласа, стандартные интегралы - они расходятся на бесконечности. Выход в использовании интегрировании по частям с интегрально заданными функциями, благо от них потребуются только граничные значения.

Например, пусть $-1 < \alpha < 0$ и

$$F(x) = \int\limits_0^\infty dt\, \underbrace{t^\alpha e^{itx}}_{\psi'(t)}\varphi(t) = \psi(t)\varphi(t)\big|_0^\infty - \int_0^\infty dt\, \psi(t)\varphi'(t),$$

где мы обозначили

$$\psi(t) = \int\limits_{\infty}^{t} d\tau\, \tau^\alpha e^{ix\tau}.$$

Тогда

$$\psi(0) = -\int\limits_0^\infty d\tau\, \tau^\alpha e^{ix\tau} = -e^{i\pi(\alpha+1)/2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}},$$

так что

$$\psi(t) \sim \frac{t^\alpha e^{itx}}{ix} \quad \text{при } t \to +\infty.$$

(оценка интеграла $\int_\infty^t d\tau\, \tau^\alpha e^{ix\tau}$ по частям). Следовательно,

$$F(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)e^{i\pi(\alpha+1)/2}}{x^{\alpha+1}} - \int\limits_0^\infty dt\, \psi(t)\varphi'(t),$$

где $\psi(t)$ обладает указанной выше асимптотикой при $t \sim \infty$. Можно повторить вычисления, взяв $\psi^{(2)}(t) = \int_\infty^t d\tau\, \psi(\tau)$. Потребуется вычислить интеграл $\int_\infty^0 d\tau\, \psi^{(2)}$, что аналогично предыдущему дает $\dfrac{\Gamma(\alpha+2)}{x^{\alpha+2}}e^{i\pi(\alpha+2)/2}$. Итак,

$$\begin{aligned} F(x) &\sim e^{i\pi(\alpha+1)/2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}a_1 + e^{i\pi(\alpha+2)/2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{x^{\alpha+2}}a_2 + \ldots = \\ &= \Gamma(\alpha+1)\left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha+1} a_1 + \Gamma(\alpha+2)\left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha+2} a_2 + \ldots, \quad t \to 0, \end{aligned}$$

где асимптотически $\varphi(t) \sim a_1 + a_2 t + \ldots + a_{n+1}t^n$, $t \to 0$. Отсюда получаем, что при наличии бесконечной дифференцируемости и равомерной сходимости интегралов от производных

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b dt\, e^{itx}\varphi(t) &\sim e^{iax}\left(a_1\Gamma(\alpha_1+1)\left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha_1+1} + a_2\Gamma(\alpha_2+1)\left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha_2+1} + \ldots\right) - \\ &- \sim e^{ibx}\left(b_1\Gamma(\beta_1+1)\left(\frac{i}{x}\right)^{\beta_1+1} + a_2\Gamma(\beta_2+1)\left(\frac{i}{x}\right)^{\beta_2+1} + \ldots\right), \end{aligned}$$

если имеют место асимптотические разложения

$$\begin{aligned} &\text{при } t \to a: \quad \varphi(t) \sim a_1(t-a)^{\alpha_1} + a_2(t-a)^{\alpha_2} + \ldots, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots, \\ &\text{при } t \to b: \quad \varphi(t) \sim b_1(t-b)^{\beta_1} + b_2(t-b)^{\beta_2} + \ldots, \quad \beta_1 < \beta_2 < \ldots. \end{aligned}$$

Для доказательства нужно разбить интеграл на два полубесконечных интеграла, сведя задачу к предыдущей, и вычесть разложения.

11.2. **Метод стационарной фазы.** Найдем асимптотику интеграла

$$F(x) = \int\limits_a^b dt\, f(t)e^{ixp(t)},$$

где $p(t)$ гладкая вещественная функция, непрерывно дифференцируемая нужное число раз на отрезке $[a,b]$, причем имеющая на этом отрезке единственный экстремум в точке t_0. Разобьем интервал на два отрезка монотонности функции $p(t)$ (пусть, для определнности, это точка минимума этой функции) и сделаем замену переменных:

$$F_1(x) = \int\limits_{t_o}^b dt\, f(t)e^{ixp(t)} = e^{ixp(t_0)}\int\limits_{t_0}^b dt\, f(t)e^{ix(p(t)-p(t_0))} =$$

(где мы рассмотрели часть отрезка: от t_0 до b. Положим: $u = p(t) - p(t_0)$)

$$= e^{ixp(t_0)} \int\limits_0^{\beta = p(b) - p(t_0)} \frac{du}{p'(t(u))} f(t(u)) e^{ixu}.$$

Положим $\varphi(u(t)) = \dfrac{f(t)}{p'(t)}$ и рассмотрим поведение этой функции в конечных точках интервала. При $t \to t_0$ имеем: $u \sim \dfrac{p''(t_0)}{2}(t - t_0)^2$ и $p'(t) \sim p''(t_0)(t - t_0) = \sqrt{2up''(t_0)}$. Отсюда

$$\varphi(u(t)) \sim \frac{f(t_0)}{\sqrt{2p''(t_0)}} u^{-1/2} \quad \text{при } u \to 0, \quad \text{т.е. при } \ t \to t_0,$$

$$\varphi(u(t)) \to \frac{f(b)}{p'(b)} \quad \text{при } u \to \beta, \quad \text{т.е. при } \ t \to b,$$

а тогда

$$F_1(x) = e^{ixp(t_0)} \frac{\Gamma(1/2) f(t_0)}{\sqrt{2p''(t_0)}} \left(\frac{i}{x}\right)^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - e^{ixp(b)} \frac{f(b)}{p'(b)} \frac{i}{x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Аналогично вычисления проводятся и для левого интервала. Нечетные в точке t_o слагаемые в сумме сокращаются, так что имеем окончательно

$$F(x) = e^{ixp(t_0)} f(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{2p''(t_0)}} \left(\frac{i}{x}\right)^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) +$$
$$+ \left(e^{ixp(a)} \frac{f(a)}{p'(a)} - e^{ixp(b)} \frac{f(b)}{p'(b)}\right) \frac{i}{x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

В случае максимума имеем в главном члене

$$\sqrt{\frac{2\pi}{-2p''(t_0)}} \left(\frac{-i}{x}\right)^{1/2}.$$

Пример. Функция Эйри отрицательного аргумента:

$$\mathrm{Ai}(-x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} dw \, \cos\left(\frac{w^3}{3} - xw\right) = \frac{x^{1/2}}{\pi} \int\limits_0^{\infty} ds \, \cos\left(x^{3/2}\left(\frac{s^3}{3} - s\right)\right) =$$

(где мы сделали замену $w = s\sqrt{x}$. Полагая $u = x^{3/2}$, имеем)

$$= \frac{x^{1/2}}{2\pi} \left(\int\limits_0^{\infty} ds \, e^{iu(s^3/3 - s)} + \int\limits_0^{\infty} ds \, e^{-iu(s^3/3 - s)} \right) =$$

(заметим, что из двух критических точек $s = \pm 1$ только $s = 1$ попадает в интервал. Поэтому, по предыдущему, где $f'' = 2$, имеем:)

$$= \frac{x^{1/2}}{2\pi} \left(e^{-2iu/3} \sqrt{\frac{2\pi}{2u}} e^{i\pi/4} + e^{2iu/3} \sqrt{\frac{2\pi}{2u}} e^{-i\pi/4} \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) =$$
$$= \sqrt{\pi} x^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + O(x^{-1/2})\right).$$

12. Лекция 12

12.1. **Метод перевала (комплексная версия).** Здесь мы рассмотрим вычисление асимптотики при $\lambda \to \infty$ интеграла

$$\int_C dz\,\varphi(z)e^{\lambda p(z)}$$

по некоторому контуру C на комплексной плоскости z. Функции $\varphi(z)$ и $p(z)$ предполагаются аналитическими по z. Идея состоит в сведении этого интеграла к интегралу типа Лапласа посредством замены $z = z(t)$:

$$\int\limits_a^b dt\,\varphi(t)e^{\lambda p(t)},$$

и использовании вещественного метода перевала. Для того, чтобы такой способ работал нужно, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) функция $\operatorname{Re} p(t)$ имеет единственный максимум (или минимум) во внутренней точке t_0,
(2) $\operatorname{Re}[\lambda(p(t) - p(t_0))] < 0$ всюду на контуре, где λ принадлежит некоторому сектору $S : \alpha_1 < \arg z < \alpha_2$.
(3) интеграл равномерно сходится по параметру $\lambda \in S$.

Тогда интеграл допускает асимптотическое разложение по степеням λ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S$. Коэффициенты асимптотического разложения определяются стандартным образом по асимптотическому поведению функций $p(z(t))$ и $\varphi(z(t))$ в окрестности точки t_0.

Вопрос: когда это можно сделать? $\operatorname{Re} p(z)$ – гармоническая функция. Гармоническая функция не имеет ни максимумов, ни минимумов во внутренних точках области определения. Что будет в точке, где $p'(z_0) = 0$ (в смысле аналитических функций: $\partial/\partial z(p(z_0)) = 0$)? Пусть ноль простой: $p''(z_0) \neq 0$. Тогда, положив для определенности $p''(z_0) = 2a$, где a - положительное вещественное число, имеем: $p(z) \sim a(z-z_0)^2 = a((x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 + 2i(x-x_0)(y-y_0)) + o(|z|^2)$, так что

$$\operatorname{Re} p(z) \sim a\left((x-x_0)^2 - (y-y_0)^2\right).$$

Значит, на контуре, заданном уравнением $y = y_0$ (на нем в качестве параметра t можно выбрать координату x) функция $\operatorname{Re} p(z) \sim a(x-x_0)^2$ и достигает в этой точке минимума, а на контуре, заданном уравнением $x = x_0$ (на нем в качестве параметра t можно выбрать координату y) функция $\operatorname{Re} p(z) \sim -a(y-y_0)^2$ достигает в этой точке максимума. Итак, если контур проходит через критическую точку z_0 и в ее окрестности проходит по линии $\operatorname{Im} p(z) = \operatorname{Im} p(z_0)$, то в этой окрестности применим вещественный метод перевала, дающий асимптотическое разложение интеграла по части контура внутри этой окрестности, причем полученное асимптотическое разложение будет верно во всяком секторе $|\arg\lambda| < \pi/2 - \delta$, $\delta > 0$. Если же нам удастся деформировать исходный контур так, чтобы на нем всюду было выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}[\lambda\,(p(z(t)) - p(z(t_0)))] < 0$$

для непустого сектора $S : \alpha_1 < \arg z < \alpha_2$ и точка z_0 осталась единственной критической точкой на контуре, то полученное асимптотическое разложение останется верным в этом секторе для всего интеграла.

Идеальный случай - когда контур интегрирования удается целиком деформировать в контур вида $\operatorname{Im}(p(z)) = \mathrm{const}$, с единственной критической точкой внутри. В этом случае получаем асимптотическое разложение интеграла в секторе $|\arg\lambda| < \pi/2 - \delta$. Главный член разложения, как и ранее, имеет вид

$$e^{\lambda p(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{p''(z_0)}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Возникает проблема выбора знака для $1/\sqrt{p''(z_0)}$. Ответ состоит в том, что нужно писать: $e^{i\theta}/\sqrt{p''(z_0)}$, где $e^{i\theta}$ направлен вдоль контура интегрирования в направлении возрастания параметра интегрирования, в случае использования локального максимума, или в обратную сторону, если используется локальный минимум.

Пример. Функция Эйри $\mathrm{Ai}(z)$ при $z>0$.

$$\mathrm{Ai}(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dt\,\cos\left(\frac{t^3}{3}+tx\right)=\frac{z^{1/2}}{\pi}\int\limits_0^\infty ds\,\cos\left(z^{3/2}\left(\frac{s^3}{3}+s\right)\right)=\frac{z^{1/2}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty ds\,e^{iu(s^3/3+s))},$$

где $u=z^{3/2}$. Критические точки тут $s=\pm i$, исходный же интеграл осциллирует и не проходит через критические точки.

$$\begin{aligned}
p(s)&=i\left(\frac{s^3}{3}+s\right)=i\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3ix^2y-3xy^2-iy^3}{3}+x+iy\right),\\
\mathrm{Re}\,p(s)&=-x^2y+\frac{y^3}{3}-y,\\
\mathrm{Im}\,p(s)&=\frac{x^3}{3}-xy^2+x=x\left(\frac{x^2}{3}-y^2+1\right).
\end{aligned}$$

Контур можно деформировать в область $y>0$ при малых y (поскольку в этом случае действительная часть показателя экспоненты отрицательна), так что его можно провести через критическую точку $s=i$. В этой точке $\mathrm{Im}\,p(s)=0$, все же решения уравнения $\mathrm{Im}\,p(s)=0$ образуют, согласно формуле выше, объединение вертикальной прямой $x=0$ и гиперболы $x^2-3y^2=-3$, которая проходит черое точку $(0,1)$ (т.е.,$s=i$) в горизонтальном направлении. $\mathrm{Re}\,p$ при этом локально выглядит как $(-x^2)$, т.е. имеем максимум. Тогда

$$\mathrm{Ai}(z)=\frac{1}{2\pi}e^{up(i)}\sqrt{\frac{2\pi}{p''(i)}}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}+O\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$

У нас $p(i)=-2/3$, $p''(i)=-2$, так что

$$\mathrm{Ai}(z)=\frac{z^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}\left(1+O(z^{-1/2})\right).$$

На самом деле контур можно деформировать до гиперболы $x^2-3y^2=-3$, на которой $\mathrm{Im}\,p=$const, так что область разложения $|\arg u|<\pi/2-\delta$, или, эквивалентно, $|\arg z|<\pi/3-\delta$.

12.2. **Несколько замечаний.** 1. Нет нужды запоминать формулы асимптотического разложения интегралов Лапласа и Фурье: они естественны. Например, можно иметь в виду такой их частный случай. Пусть функция $f(t)$, растущая не быстрее некоторой экспоненты, раскладывается в окрестности нуля в сходящийся ряд: $f(t)=\sum_{n\ge0}a_nt^{\alpha_n}$. Тогда интеграл Лапласа $\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$ можно почленно проинтегрировать, имея в виду, что получим не точное равенство, а асимптотическое:

$$\int_0^\infty\left(\sum_{n\ge0}a_nt^{\alpha_n}\right)e^{-zt}dt\sim_{z\to\infty}\sum_{n\ge0}a_n\int_0^\infty t^{\alpha_n}e^{-zt}dt,\qquad|\arg z|<\pi/2-\delta.$$

Тоже самое можно делать и с интегралами Фурье от убывающих функций. При этом исходный ряд для $f(t)$ тоже может быть асимптотическим. так что. например,

$$\int_0^\infty e^{-1/t^2}e^{-zt}dt\sim0,$$

но при этом сходимость ряда для $f(t)$ все равно приводит, вообще говоря, только к асимптотическому ряду для интеграла Лапласа.

2. Если функция $f(t)$ продолжается до аналитической функции комплексного переменного t, то и интеграл Лапласа аналитически продолжается на больший сектор переменной z. А именно, предположим, что функция $f(t)$ аналитична в секторе $\alpha_1<|\arg z|<\alpha_2$ и растет там не быстрее некоторой экспоненты. Тогда мы можем аналитически продолжить интеграл Лапласа

$$F(z)=\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$

до аналитической в секторе $\alpha_1 - \pi/2 < |\arg z| < \alpha_2 + \pi/2$ функции, поворачивая постепенно луч интегрирования. Здесь используется то, что при подходящих z интеграл по большой дуге, соединяющий исходный и новый контур, будет стремится к нулю с увеличением диаметра дуги. При этом асимптотическая оценка для аналитически продолженного интеграла остается верной и в расширенной области. Так, например, для рассмотренном нами многократно интеграла

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t}$$

асимптотическое разложение

$$F(z) \sim \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}, \qquad z \to \infty$$

будет верно в области $|\arg z| < 3\pi/2 - \delta$, поскольку функция $1/(1+t)$ аналитична в секторе $|\arg z| < \pi$ (заметим, что теперь уже имеется в виду оценка не только интеграла, но и его аналитического продолжения!).

3. Не следует думать, что хорошо сходящийся в окрестности предельной точки ряд автоматически задает асимптотическое разложение функции в окрестности этой точки. Например, всюду сходящийся ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

не является асимптотическим при $x \to \infty$, поскольку всякий его остаток не стремится к нулю при $x \to \infty$.

12.3. **Формула Эйлера–Маклорена.** Идея оценки интеграла Фурье – использование интегрирования по частям способом, противоположным естественному: мы заменяем интеграл, где подинтегральная функция содержит исходно исследуемую $f(t)$ на интеграл, содержащий $f'(t)$. Аналогичный прием используется для вычисления сумм:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} k(f(k) - f(k-1)) + nf(n)$$

(преобразование Абеля). Эйлер использовал эти два приема одновременно.

Рассматривается следующая задача. Фиксируем целое число a и функцию вещественного переменного $f(x)$. Исследуем отличие суммы

$$S_n = \frac{1}{2}f(a) + f(a+1) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

от интеграла $\int_a^n f(x)dx$. Соответствующую разность можно представить интегралом

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \int_a^n \omega_1(x) f'(x)dx, \qquad \text{где} \quad \omega_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}. \tag{12.1}$$

В самом деле, для всякого целого j имеем, интегрируя по частям,

$$\int_j^{j+1} \left(x - j - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx = \frac{f(j) + f(j+1)}{2} - \int_j^{j+1} f(x)dx.$$

Суммируя это тождество по j, приходим к (12.1). Другой способ вывода - использование интеграла Стильтьеса. Имеем

$$\int_a^n f(x)d[x] = f(a+1) + \ldots + f(n), \qquad \int_a^n f(x)d[-x] = -f(a) - \ldots - f(n-1),$$

так что

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \int_a^n f(x)d\left(\frac{[x] - [-x])}{2} - x\right).$$

Беря интеграл Стильтьеса по частям, получим

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = -\int_a^n f'(x)\left(\frac{[x] - [-x])}{2} - x\right)dx = -\int_a^n f'(x)\left([x] - x - \frac{1}{2}\right)dx$$

Продолжим, начиная с формулы (12.1), процесс интегрирования по частям. Заметим. что функция $\omega_1(x)$ периодична с периодом 1 и ее интеграл по периоду нулевой:

$$\omega_1(x) = \omega_1(x+1), \qquad \int_0^1 \omega_1(x)dx = 0, \qquad \text{и} \qquad \omega_1(x) = x - \frac{1}{2} \qquad \text{при} \qquad 0 \le x < 1.$$

Поэтому существует (теперь уже непрерывная) периодическая функция $\omega_2(x)$ с нулевым интегралом по периоду, такая. что $\omega_2'(x) = \omega_1(x)$. Нетрудно видеть, что

$$\omega_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

Интегрирование (12.1) по частям дает равенство

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \omega_2(x)f'(x)|_a^n - \int_a^n \omega_2(x)f''(x)dx \tag{12.2}$$

и, более общо,

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \sum_{s=2}^m \omega_s(x)f^{(s-1)}(x)|_a^n + (-1)^{m+1}\int_a^n \omega_m(x)f^{(m)}(x)dx \tag{12.3}$$

Это и есть формула Эйлера–Маклорена в простейшем варианте.

Периодические с периодом 1 функции $\omega_k(x)$ находятся рекуррентно из условий

$$\omega_{k+1}'(x) = \omega_k(x), \qquad \int_0^1 \omega_k(x)dx = 0.$$

Для более явного описания функций $\omega_k(x)$ соберем их в производящую функцию

$$G(x,t) = \sum_{k\ge 0} \omega_k(x)t^k, \qquad 0 \le x < 1$$

положив $\omega_0(x) = 1$. Тогда условие $\omega_{k+1}'(x) = \omega_k(x)$ запишется в виде

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \sum \omega_k'(x)t^k = \sum \omega_{k-1}t^k = tG(x,t).$$

Дифференциальное уравнение $\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = tG(x,t)$ легко решается:

$$G(x,t) = g(t)e^{tx},$$

где $g(t)$ - произвольная функция. Ее позволяет найти соотношение $\int_0^1 \omega_k(x)dx = \delta_{k,0}$, которое в терминах G имеет вид $\int_0^1 G(x,t)dt = 1$:

$$\int_0^1 g(t)e^{tx}dt = \frac{g(t)}{t}e^{tx}\big|_0^1 = \frac{g(t)\,(e^t-1)}{t} = 1,$$

откуда $g(t) = \frac{t}{e^t-1}$ и $G(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t-1}$. В принятых сейчас обозначениях (раньше использовали также нормировку без факториалов) функция $G(x,t)$ есть производящая функция многочленов Бернулли $B_k(x)$

$$G(x,t) = \sum_{k\ge 0} B_k(x)\frac{t^k}{k!}, \qquad \text{так что} \qquad \omega_k(x) = \frac{B_k(x-[x])}{k!}.$$

Более употребительные числа Бернулли определяются как значения полиномов Бернулли в нуле, $B_k = B_k(0)$, так что $t/(e^t-1)$ является их производящей функцией:

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n\ge 0}\frac{B_n}{n!}t^n.$$

Полиномы Бернулли выражаются через числа Бернулли. В самом деле, из вида соответствующих производящих функций следует равенство формальных рядов по t: $e^{tx}\sum_k B_k t^k/k! = \sum_n B_n(x)t^n/n!$, т.е.,

$$\left(\sum_l \frac{t^l}{l!}\right)\left(\sum_k B_k\frac{t^k}{k!}\right) = \sum_n B_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

откуда

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^n B_{n-j}x^j.$$

Далее, производящая функция $G(x,t)$ инвариантна относительно замены $x \leftrightarrow 1-x$, $t \leftrightarrow -t$, поэтому $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$, в частности, $B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$. Поскольку функции $\omega_k(x)$ периодичны и непрерывны при $n \geq 3$, заключаем, что $B_{2k+1} = 0$ при $k \geq 1$. Первые значения чисел Бернулли: $B_0 = 1$, $B_1 = -\dfrac{1}{2}$, $B_2 = \dfrac{1}{12}$, $B_3 = 0$, $B_4 = \dfrac{1}{30}$. Теперь формулы (12.2) и (12.3) можно переписать следующим образом:

$$\sum_a^n f(j) = \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(a)) - \int_a^n \frac{B_2(x-[x])}{2}f''(x)dx, \tag{12.4}$$

$$\sum_a^n f(j) = \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \sum_{s=2}^m \frac{B_2s}{(2s)!}\left(f^{(2s-1)}(n) - f^{(2s-1)}(a)\right) + R_m, \tag{12.5}$$

где остаток

$$R_m = -\int_a^n \frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}f^{(2m)}(x)dx.$$

12.4. **Применения формулы Эйлера–Маклорена.** Прежде всего хотелось бы иметь хоть какую-нибудь оценку остаточного члена R_m, точнее, подинтегрального выражения $\frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}$. Грубая оценка получается из изучения особенностей производящей функции $G(x,t)$. Эта функция имеет полюса по t в точках $t = 2\pi i k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Это означает, что радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k\geq 0}\frac{B_k(x)}{k!}t^k$ равен 2π, так что для любого r, $0 < r < 1$ выражение $\frac{B_k(x)}{k!}(2\pi r)^k$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Таким образом, имеем оценку

$$\left|\frac{B_k(x)}{k!}\right| < C(r)\frac{1}{(2\pi r)^k}$$

для любого r, $0 < r < 1$.

Формулу Эйлера–Маклорена естественно применять для функций $f(x)$, производные $f^{(n)}(x)$ которых убывают с ростом n. Допустим, мы находимся ровно в такой ситуации и хотим оценить асимптотику суммы $\sum_a^n f(j)$ по параметру n. Тогда слагаемые $\dfrac{B_2s}{(2s)!}f^{(2s-1)}(a)$ собираются в сумму, не зависящую от n. Имеется простой изящный прием, позволяющий избавиться от них сразу. Предположим, например, что уже $\int_a^{+\infty} f''(x)dx$ абсолютно сходится. Преобразуем формулу (12.4) следующим образом:

$$\begin{aligned}\sum_a^n f(j) &= \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(a)) - \int_a^n \omega_2(x)f''(x)dx \\ &= \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(a)) - \int_a^\infty \omega_2(x)f''(x)dx + \int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx \\ &= \int_a^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12} + C + \int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx,\end{aligned}$$

где

$$C = \frac{f(a)}{2} - \frac{f'(a)}{12} - \int_a^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2}f''(x)dx. \tag{12.6}$$

Теперь будем описанным ранее методом интегрировать $\int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx$ по частям:

$$\int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx = \omega_3(n)f^{(3)}(n) - \int_n^\infty \omega_3(x)f^{(3)}(x)dx$$

и т.д. В результате получим формулу

$$\sum_a^n f(j) = \int_a^n f(x)dx + C + \frac{f(n)}{2} + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!}f^{(2s-1)}(n) + R_m,$$

где C задано соотношением (12.6), и $R_m = \int\limits_n^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}f^{(2m)}(x)dx.$

Пример. Асимптотическая оценка $n!$ (точнее, $\log n!$). Представим $\log n!$ в виде суммы $\log n! = \log 1 + \log 2 + \ldots + \log n$ и применим предыдущие рассуждения для функции $f(x) = \log x$. Ее производные имеют вид $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$. В частности, $\int_1^\infty f''(x)dx = -\int_1^\infty 1/x^2 dx$ сходится. Поэтому

$$\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n = \int_1^n \log x dx + \frac{1}{2}\log n + C + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!}f^{(2s-1)}(n) + R_m$$

$$= (x\log x - x)\Big|_1^n + \frac{1}{2}\log n + C + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!}f^{(2s-1)}(n) + R_m$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + 1 + C + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)(2s-1)n^{2s-1}} + R_m,$$

где

$$C = -\frac{1}{12} + \int_1^\infty \frac{B_{2s}(x-[x])}{(2x^2)}dx, \qquad R_m = \int\limits_n^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{2mx^{2m}}dx.$$

Интегрируя по частям, замечаем, что $R_m = O(1/n^{2m})$. Для постоянной C можно получить другое выражение, заметив, что в силу описанной выше формулы

$$C + 1 = \lim_{n\to\infty}\left(\log n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n + n\right),$$

и, применив формулу Стирлинга для $n! = \Gamma(n+1)$,

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + o(1)\right),$$

получим, что $C + 1 = \frac{1}{2}\log 2\pi$, и в итоге полное асимптотическое разложение

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)(2s-1)n^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2m}}\right).$$

12.5. **Ряд Стирлинга для** $\log\Gamma(z)$**.** . Подобным же образом можно получить полное асимптотическое разложение для логарифма Г-функции Эйлера. Воспользумся, к примеру, определением Эйлера:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^n}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Тогда

$$\log\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\big((\log 1 + \ldots \log n) - (\log z + \ldots \log(z+n)) + z\log n\big). \tag{12.7}$$

Воспользуемся для каждой из сумм интегральным представлением (12.4):

$$\log 1 + \ldots + \log n = \int_1^n \log x dx + \frac{1}{2}(\log 1 + \log n) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \int_1^n \frac{B_2(x-[x])}{2x^2}dx,$$

$$\log z+\ldots+\log(z+n) = \int_0^n \log(x+z)dx+\frac{1}{2}\left(\log z + \log(z+n)\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{z}\right)+\int_0^n \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx.$$

Подставляя эти представления в (12.7), получим

$$\log\Gamma(z) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \log x dx - \int_0^n \log(x+z)dx + \frac{1}{2}\left(\log\frac{n}{z(n+z)}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{z}{n(z+n)}-\frac{z-1}{z}\right)+z\log n\right)$$
$$+C-\int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx,$$

где $C=\int_1^n \frac{B_2(x-[x])}{2x^2}dx$.

Вычислим вначале предел во второй строке последней формулы:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \log x dx - \int_0^n \log(x+z)dx + \frac{1}{2}\left(\log\frac{n}{z(n+z)}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{z}{n(z+n)}-\frac{z-1}{z}\right)+z\log n\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left((x\log x - x)\big|_1^n - ((x+z)\log(x+z)-(x+z))\big|_{x=0}^{x=n} - \frac{1}{2}\log z + z\log n + \frac{1}{12z}-1\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(n\log n - (n+z)\log(n+z) + z\log z - \frac{1}{2}\log z + z\log n + \frac{1}{12z}\right) =$$
$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\log\frac{n+z}{n} = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\log\left(1+\frac{z}{n}\right) =$$
$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\frac{z}{n} = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{12z}.$$

Оставшийся интеграл

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx = \int_0^\infty \frac{\omega_2(x)}{(x+z)^2}dx$$

оценим привычным способом интегрирования по частям с применением функций $\omega_k(x)$:

$$F(z) = -\sum_{s=2}^{m}\frac{B_{2s}}{2s(2s-1)z^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2m}}\right),$$

так что

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + C + \sum_{s=2}^{m}\frac{B_{2s}}{2s(2s-1)z^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2m}}\right) \tag{12.8}$$

где $C=\frac{1}{2}\log 2\pi$, например, из того же сравнения с формулой Стирлинга для $\Gamma(z)$.

Область параметра z, в которой работает асимптотическое разложение (12.8), определяется областью применимости асимптотической оценки интеграла $F(z)=\int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx$ при больших z. Для этого знаменатель $x+z$ должен быть равномерно отделен от нуля, т.е., асимптотическое разложение Стирлинга для $\log\Gamma(z)$ справедливо в области $|\arg z| < \pi-\delta$ для сколь угодно малого положительного δ.

13. Лекция 13. Преобразование Радона

13.1. **Определение и основные свойства.** Преобразование Радона – одна из задач **интегральной геометрии**, т.е. области исследований, рассматривающей интегральные преобразования, ставящие в соответствие финкциям на многообразии X их интегралы по подмногообрзиям из какого-либо семейства M. Т.е. возникает соответствие между функциями на многообразии X и функциями на некотором многообразии M его подмногообразий. Например, функциям на евклидовом пространстве E^n ставятся в соответствие их интегралы по всевозможным прямым, переводящее функции на E^n в функции на многообразии прямых. Мы рассмотрим простейший случай: преобразование Радона на евклидовой плоскости, т.е. интегральное преобразование, сопоставляющее функции $f(x_1, x_2)$ на плоскости ее интегралы по всевозможным прямым. Зададим прямую на плоскости уравнением

$$x_1 \cos\phi + x_2 \sin\phi - p = 0,$$

что эквивалентно, можно задать параметрически уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= -t\sin\phi + p\cos\phi, \\ x_2 &= t\cos\phi + p\sin\phi. \end{aligned}$$

Таким образом p – растояние прямой от начала координат, t – параметер на прямой, $v = (\cos\phi, \sin\phi)$ – вектор нормали к прямой, при фиксированном p имеем: $dx_1 = -\sin\phi dt$, $dx_2 = \cos\phi dt$, так что элемент длины есть $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = dt^2$, т.е. dt – евклидова мера на такой прямой. Значит многообразие прямых у нас параметризовано парой переменных $\{\phi, p\}$, причем параметрам $\{\phi, p\}$ и $\{\phi', p'\}$ отвечает одна и та же прямая тогда и только тогда, когда $\phi' = \phi + \pi k$, $p' = (-1)^k p$, $k \in \mathbb{Z}$. Это означает, что многообразие прямых на плоскости получается из бесконечного кругового цилиндра с цилиндрическими координатами $\{\phi, p\}$ путем отождествления точек $\{\phi, p\}$ и $\{\phi + \pi, -p\}$.

Преобразование Радона функции $f(x_1, x_2)$ задается равенством

$$\mathscr{R}f(\phi, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(-t\sin\phi + p\cos\phi, t\cos\phi + p\sin\phi). \tag{13.1}$$

Это преобразование можно рассматривать на различных пространствах функций. Мы рассмотрим его для простоты на пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций. В этом случае преобразование Радона $\mathscr{R}f$ – финитная бесконечно дифференцируемая функция на многообразии прямых, т.е. бесконечно дифференцируемая функция от ϕ и p, финитная по p. Впрочем, совсем нетрудно распространить его и на пространство функций Шварца.

Свойства преобразования Радона.

(1) В силу (13.1): $\mathscr{R}(f)(\phi+\pi, -p) = \mathscr{R}f(\phi.p)$, что и означает, что функция $\mathscr{R}f$ есть функция именно на многообразии прямых.

(2) Равенство (13.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathscr{R}f(\phi, p) &= \int dx_1 \int dx_2\, f(x_1, x_2) \int dt\, \delta(x_1 + t\sin\phi - p\cos\phi)\delta(x_2 - t\cos\phi - p\sin\phi) = \\ &= \int dx_1 \int dx_2\, f(x_1, x_2) \int \frac{dt}{|\sin\phi|}\, \delta\left(t + \frac{x_1}{\sin\phi} - p\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\right) \delta(x_2 - t\cos\phi - p\sin\phi) = \end{aligned}$$

(где мы предположили, что $\sin\phi \neq 0$)

$$= \int dx_1 \int dx_2\, f(x_1, x_2) \frac{1}{|\sin\phi|}\, \delta\left(x_2 + \frac{x_1\cos\phi}{\sin\phi} - \frac{p}{\sin\phi}\right) =$$

$$= \int dx_1 \int dx_2\, f(x_1, x_2)\delta(x_1\cos\phi + x_2\sin\phi - p), \tag{13.2}$$

что, очевидно, справедливо и для $\sin\phi = 0$.

(3) Преобразование Радона перестановочно с вращениями плоскости. Пусть дана $f(x_1, x_2)$ и пусть $f^{(\alpha)}(x_1, x_2) = f(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_2 \cos\alpha + x_1 \sin\alpha)$. Тогда легко видеть, что

$$\mathscr{R} f^{(\alpha)}(\phi, p) = \mathscr{R} f(\alpha + \phi, p). \tag{13.3}$$

(4) Если $f(x_1, x_2)$ зависит только от расстояния $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ до начала координат, $f(x) = F(r)$, то преобразование Радона зависит только от p:

$$\mathscr{R} f(\phi, p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\, F(\sqrt{t^2 + p^2}) = \widehat{F}(p), \tag{13.4}$$

где $\widehat{F}(p)$ – обозначение.

(5) Преобразование Радона перестановочно и со сдвигами плоскости. Пусть дана $f(x_1, x_2)$ и пусть $f^{(y)}(x_1, x_2) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Тогда по (13.2) легко видеть, что

$$\mathscr{R} f^{(y)}(\phi, p) = \mathscr{R} f(\phi, p + y_1 \cos\phi + y_2 \sin\phi). \tag{13.5}$$

13.2. **Обращение преобразования Радона.** Важным свойством преобразования Радона, обеспечившим ему множество приложений, прежде всего в томографии, является его обратимость, т.е. возможность восстановления самой функции $f(x_1, x_2)$ по ее интегралам по прямым. Ввиду указанных свойств преобразования Радона, достаточно научиться восстанавливать функцию в какой-то одной точке, например $f(0,0)$ и начать можно с радиально симметричных функций. Итак, пусть $f(x_1, x_2) = F(r)$. Тогда преобразование Радона задется функцией $\widehat{F}(p)$ по (13.4), т.е.

$$\widehat{F}(p) = 2 \int\limits_0^{+\infty} dt\, F(\sqrt{t^2 + p^2}) = \int\limits_{p^2}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t - p^2}}\, F(\sqrt{t}).$$

Это тоже известное интегральное преобразование: преобразование Абеля порядка 1/2. Его обращение дается равенством

$$F(r) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_r^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{p^2 - r^2}} \widehat{F}'(p). \tag{13.6}$$

Докажем его. Заметим, что по предыдущему

$$\widehat{F}'(p) = 2p \int\limits_{p^2}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t - p^2}}\, \frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t}.$$

(Для доказательства этого равенства нужно заменить нижний предел на $p^2 + \epsilon$, $\epsilon > 0$, а потом перейти к пределу.) Тогда правая часть (13.6) принимает вид:

$$\text{п.ч.} = -\frac{2}{\pi} \int\limits_r^{\infty} \frac{dp\, p}{\sqrt{p^2 - r^2}} \int\limits_{p^2}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t - p^2}}\, \frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t} =$$

(заметим, что здесь $t > p^2 > r^2$)

$$= -\frac{2}{\pi}\int\limits_{r^2}^{+\infty} dt\,\frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t}\int\limits_{r}^{\sqrt{t}} \frac{dp\,p}{\sqrt{(p^2-r^2)(t-p^2)}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{r^2}^{+\infty} dt\,\frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t}\int\limits_{r^2}^{t} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{t-r^2}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{t+r^2}{2}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{r^2}^{+\infty} dt\,\frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int\limits_{r^2}^{+\infty} dt\,\frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t},$$

что и следовало доказать. В частности из (13.6) следует, что

$$F(0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dp}{p}\widehat{F}'(p) \equiv -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{p}\widehat{F}'(p), \tag{13.7}$$

причем ввиду того, что $\widehat{F}(p)$ – четная функция, эти интегралы хорошо определены и не требуют регуляризации. Перейдем теперь к общему случаю функции f. Усреднив ее по окружности с центром в точке 0, получаем функцию, зависящую только от расстояния, обозначим ее

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi\, f(r\cos\phi, r\sin\phi). \tag{13.8}$$

Очевидно, что

$$F(0) = f(0,0). \tag{13.9}$$

Пусть $\widehat{F}(p)$ определено, как в (13.4). Тогда, как легко видеть,

$$\widehat{F}(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi\,\mathscr{R}f(\phi,p). \tag{13.10}$$

Мы видим, что $\widehat{F}(p)$ – среднее $\mathscr{R}f(\phi,p)$ по прямым, равноотстоящим от точки $\{0.0\}$. Теперь, по (13.7) и (13.9) имеем:

$$f(0,0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{p}\widehat{F}'(p). \tag{13.11}$$

Для восстановляния $f(x_1,x_2)$ в произвольной точке x мы воспользуемся свойством 5, указанным выше. Действительно, в силу введенного там обозначения $f(x_1,x_2) = f^{(x)}(0,0)$. Тогда по (13.5)

$$\mathscr{R}f^{(x)}(\phi,p) = \mathscr{R}f(\phi, p + x_1\cos\phi + x_2\sin\phi), \tag{13.12}$$

так что из (13.11) получаем

$$f(x_1,x_2) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{p}\widehat{F}_p'(x_1,x_2;p). \tag{13.13}$$

где, как следует из (13.10) и (13.12)

$$\widehat{F}(x_1,x_2;p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi\,\mathscr{R}f(\phi,p), \tag{13.14}$$

что завершает построение обратного преобразования. Мы видим, что $\widehat{F}(x_1, x_2; p)$ – среднее функции $\mathscr{R}f(\phi, p)$ по прямым, равноотстоящим от точки $x = \{x_1.x_2\}$.

Пример. Пусть $f(x_1, x_2) = e^{-r^2}$. Тогда по (13.4)

$$\mathscr{R}f(\phi, p) = \sqrt{\pi}e^{-p^2}.$$

Литература к лекции 13: И.М.Гельфанд, С.Г.Гиндикин, М.И.Граев “Избранные задачи интегральной геометрии”, гл. I.