Пучки и гомологическая алгебра

С.М.Натанзон

Содержание

1. Введение. 1
2. Пучки. 2
2.1. Основные определения. 2
2.2. Накрытия. 4
3. Когомологии с коэффициентами в пучке. 5
3.1. Каноническая резольвента пучка. 5
3.2. Когомологии. 6
4. Точные последовательности. 8
4.1. Мягкие пучки. 8
4.2. Длинная точная последовательность. 10
5. Аксиоматическая теория когомологий. 11
5.1. Ацикличные резольвенты. 11
5.2. Аксиоматический подход. 12
6. Когомологии Чеха. 13
6.1. Когомологии покрытия. 13
6.2. Теорема Лере. 14
7. Когомологии де Рама. 15
7.1. Пучки модулей. 15
7.2. Теорема де Рама. 16
8. Векторные расслоения. 17
8.1. Определения и примеры. 17
8.2. Универсальные расслоения. 19
9. Комплексные многообразия. 20
9.1. Дифференциальные формы. 20
9.2. Когомологии Дольбо. 22
10. Линейные расслоения и первый класс Черна. 22

1. Введение.

Хорошо известно, что непостоянная функция, голоморфная на комплексной плоскости, неограничена. Другими словами, в некоторых случаях по локальным свойствам функций (например голоморфность) можно судить о ее глобальных свойствах. Взаимосвязь локальных и глобальных свойств позволяет исследовать явление в целом стартуя с его, локальных, обычно проще контролируемых, свойств.

Необходимый для этого математический аппарат был создан в середине прошлого века. Он основан на *теории пучков*. Свойства пучков автоматизируют свойства тензорных полей на многообразиях. Пучкам отвечают коммутативные группы, называемые *группами когомологий со значениями в пучке*, и специальные элементы групп когомологий многообразия со значениями в постоянном пучке, называемые *классами Черна.* Группы когомологий и классы Черна определяют важнейшие фундаментальные свойства многообразия. Эти понятия являются основным языком всех разделов современной геометрии. Настоящий курс является введением в теорию пучков и связанных с ней структур.

Первая часть курса (разделы 1-7) посвящена когомологиям со значениями в пучках. Мы даем несколько по виду совершенно не похожих друг на друга конструкций когомологий: с помощью ацикличных резольвент, через семейства покрытий (когомологии Чеха) и, для гладких многообразий, с помощью дифференциальных форм (когомологии де Рама) и сингулярных коцепей (сингулярные когомологии). Мы доказываем что все эти конструкции приводят к одинаковым группам когомологий (теоремы Лере и де Рама). Более того, мы показываем, что когомологии реализуют единственный естественный функтор из категории пучков абелевых групп в категорию абелевых групп, переводящий короткую точную последовательность пучков в длинную точную последовательность групп.

Вторая часть курса посвящена самому "массовому"типу пучков: локально свободным пучкам, то есть пучкам сечений локально тривиальных векторных расслоений. После описания категории таких пучков (раздел 8) мы определяем и исследуем свойства эрмитовых связностей в расслоениях (раздел 9). Далее (раздел 10) мы определяем классы Черна как миноры матриц кривизны эрмитовых связностей, исследуем функториальные свойства классов Черна и обсуждаем другие определения классов Черна. В последних двух разделах мы исследуем простейшие свойства пучков и расслоений на комплексных многообразиях. В разделе 11 мы определяем когомологии Дольбо и числа Ходжа. В разделе 12 мы доказываем, что первый класс Черна голоморфного расслоения ранга 1 описывается оператором Бокштейна и, таким образом, двойственен классу линейной эквивалентности дивизора мероморфного сечения расслоения.

Книга является записью курса, который автор неоднократно читал для студентов 2-4 курсов Независимого Московского Университета.

2. Пучки.

2.1. **Основные определения.** Напомним, что *топологическим пространством* называется множество X с системой подмножеств $\mathfrak{U}$ такой, что

1) $X, \emptyset \in \mathfrak{U}$,

2) объединение $\bigcup U_\alpha$ произвольного числа $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$,

2) пересечение $\bigcap U_\alpha$ конечного числа $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$.

Подмножества из $\mathfrak{U}$ называются *открытыми множествами.* Дополнение $X - U$ к отрытому множеству $U \in \mathfrak{U}$ называется *замкнутым множеством.*

Предпучком $\mathcal{F}$ над топологическом пространством $(X, \mathfrak{U})$ называется

a) набор множеств $\{\mathcal{F}(U) | U \in \mathfrak{U}, U \neq \emptyset\}$, называемый *сечениями над* U,

b) набор отображений $\{r^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V) |\ U, V \in \mathfrak{U}, V \subset U\}$, называемых *ограничениями*, такой, что

1)$r^U_U = 1_U$ — тождественное отображение;

2)$r^U_W = r^V_W r^U_V$ при $W \subset V \subset U$.

Предпучок $\mathcal{F}$ называется *предпучком групп (колец, модулей и т.п)*, если все множества $\mathcal{F}(U)$ являются группами (соответственно кольцами, модулями и т.п) и все отображения r^U_V являются гомоморфизмами соответствующих структур.

Пучком называется предпучок $\mathcal{F}$, в котором выполнены следующие аксиомы:
1) Пусть $U = \bigcup U_i$, $s, t \in \mathcal{F}(U)$ и $r^U_{U_i}(s) = r^U_{U_i}(t)$ для всех U_i. Тогда $s = t$.
2) Пусть $U = \bigcup U_i$, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ и $r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$ для всех i, j. Тогда существует $s \in \mathcal{F}(U)$ такое, что $r^U_{U_i}(s) = s_i$.

Пример 2.1. *Пучок отображений множества X в множество Y. Здесь $\mathcal{F}(U)$ — множество всех отображений множества U в множество Y, а r^U_V — ограничение отображения на подмножество. Если все множество Y является группой (соответственно кольцом, модулем и т.п), то возникает пучок групп (соответственно колец, модулей и т.п).*

Пример 2.2. *Если в предыдущем примере в качестве $\mathcal{F}(U)$ рассматривать лишь локально постоянные отображения, то возникает пучок, называемый постоянным.*

Пример 2.3. *Если в примере 2.1 считать, что Y — топологическое пространство и $\mathcal{F}(U)$ — непрерывные функции, то возникает пучок непрерывных отображений.*

Пример 2.4. *Если в предыдущем примере считать, что X — гладкое (соответственно комплексное) многообразие, Y — поле вещественных (соответственно комплексных) чисел и $\mathcal{F}(U)$ — гладкие (соответственно голоморфные) функции, то возникает пучок гладких (соответственно голоморфных) функций.*

Пример 2.5. *Если как и в предыдущем примере считать, что X — гладкое или комплексное многообразие, а $\mathcal{F}(U)$ — тензорные поля на нем , то возникает пучок тензорных полей.*

Упражнение 2.1. *Доказать, что конструкции, описанные в примерах, действительно порождают пучки.*

Упражнение 2.2. *Придумать предпучок, не являющийся пучком.*

Говорят, что *предпучок $\mathcal{A}$ является подпредпучком пучка $\mathcal{B}$* (и пишут $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$), если $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{B}(U)$ для любого открытого множества U.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — предпучки на X. Их *морфизмом* $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется набор отображений $\{h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) | U \in \mathfrak{U}\}$ такой, что $h_V r^U_V = r^U_V h_U$. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются предпучками групп, колец, модулей и т.п, то морфизмами таких предпучков считаются лишь морфизмы $\{h_U\}$, порождающие гомоморфизмы соответствующих структур. Морфизм называется *изоморфизмом*, если все отображения взаимно однозначны. Ядра и образы этих отображений порождают подпредпучки $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathcal{F}$ и $\mathrm{Im}(h) \subset \mathcal{G}$.

Упражнение 2.3. *Будем считать, что в примере 2.5 множество $\mathcal{F}(U)$ состоит из гладких или голоморфных (когда X — комплексное многообразие) тензорных полей. Доказать, что такое множество $\mathcal{F}(U)$ также порождает пучок, называемый пучком гладких (соответственно голоморфных) тензорных* *полей. Доказать, что этот пучок мономорфно отображается в пучок всех тензорных полей из примера 2.5.*

2.2. **Накрытия.** Сюръективный локальный гомеоморфизм топологических пространств $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ назовем *накрытием* (это определение отличается от стандартного, но удобно для изучения пучков).

Сечением накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ на подмножестве $U \subset X$ называется отображение $s : U \to Y$ такое, что $\pi s = 1_U$ — тождественное отображение. Обозначим через $\mathcal{E}(U)$ множество всех сечений и через $\overline{\mathcal{F}(U)}$ множество непрерывных сечений над $U \subset X$.

Упражнение 2.4. *Доказать, что множества сечений $\{\mathcal{E}(U)|U \in \mathfrak{U}\}$ и $\{\overline{\mathcal{F}(U)}|U \in \mathfrak{U}\}$ вместе с естественными отображениями ограничений сечений на подмножества образуют пучки. Они называется пучком всех сечений и пучком непрерывных сечений накрытия соответственно.*

Наша ближайшая цель — сопоставить всякому предпучку $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U), r_V^U\}$ на X некоторое накрытие пространства X. Обозначим через $\mathcal{F}_x = \lim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ *индуктивный предел* множеств $\mathcal{F}(U)$ относительно отображений ограничения r_V^U. По определению, множество $\mathcal{F}_x$ состоит из классов эквивалентности $\bigcup_{U \ni x} \mathcal{F}(U)/\sim_x$, где $s \in \mathcal{F}(V) \sim_x t \in \mathcal{F}(W)$, если существует открытое множество $x \in U \subset V \cap W$ такое что $r_U^V(s) = r_U^W(t)$.

Положим $\widetilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$. Пусть $s \in \mathcal{F}(U)$. Тогда каждой точке $x \in U$ отвечает класс эквивалентности $s_x \in \mathcal{F}_x$ сечения s. Объединение всех таких классов образует подмножество $s_U \subset \widetilde{\mathcal{F}}$. Зададим на $\widetilde{\mathcal{F}}$ топологию, считая, что открытыми являются все множества s_U и все объединения таких множеств.

Упражнение 2.5. *Доказать, что описанная конструкция действительно задает структуру топологического пространства на $\widetilde{\mathcal{F}}$. Доказать, что отображение $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$, где $\pi(\mathcal{F}_x) = x$, является накрытием.*

Таким образом всякий предпучок $\mathcal{F}$ *порождает* пучок $\overline{\mathcal{F}}$ непрерывных сечений накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$. Если $\mathcal{F}$ является предпучком с алгебраической структурой (т.е. является предпучком групп, модулей и т.п.), то этой же структурой обладает и порожденный пучок. Сечению $s \in \mathcal{F}(U)$ отвечает множество s_U, образующее сечение $\bar{s} \in \overline{\mathcal{F}}(U)$. Соответствие $s \mapsto \bar{s}$ порождает отображение $\tau_U : \mathcal{F}(U) \to \overline{\mathcal{F}}(U)$.

Упражнение 2.6. *Доказать, что семейство отображений $\mathcal{F}(U) \to \overline{\mathcal{F}}(U)$ образует морфизм предпучков $\tau_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{F}}$. Боле того, если $\mathcal{F}$ — пучок групп, то $\overline{\mathcal{F}}$ — тоже пучок групп и $\tau_{\mathcal{F}}$ — морфизм пучков групп.*

Упражнение 2.7. *Доказать, что морфизм предпучков $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ естественно порождает непрерывное отображение$\widetilde{h} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{B}}$, которое, в свою очередь, естественно порождает морфизм пучков $\bar{h} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{B}}$ такой, что $\tau_{\mathcal{B}} h = \bar{h} \tau_{\mathcal{A}}$.*

Теорема 2.1. *Если $\mathcal{F}$ — пучок, то $\tau : \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{F}}$ — изоморфизм пучков.*

Доказательство. а) Инъективность. Пусть $s', s" \in \mathcal{F}(U)$ и $\tau_U(s') = \tau_U(s")$. Рассмотрим произвольную точку $x \in U$. Тогда $r_x^U(s') = r_x^U(s")$. Следовательно, существует содержащее точку x открытое множество $V^x \subset U$ такое, что $r_{V^x}^U(s') = r_{V^x}^U(s")$. Таким образом, существует покрытие $U = \bigcup_{x \in X} V^x$ такое, что $r_{V^x}^U(s') = r_{V^x}^U(s")$. Согласно первой аксиоме пучка отсюда следует, что $s' = s"$.

b) Сюръективность. Пусть $\bar{s} \in \overline{\mathcal{F}}(U)$ и $x \in U$. Существует открытое множество $\hat{U}_x \subset X$ и открытое подмножество $\hat{s}^\circ \subset \bar{s} \in \overline{\mathcal{F}}(\hat{U}_x)$, на котором накрытие $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ порождает гомеоморфизм $\pi|_{s^\circ} : \hat{s}^\circ \to \hat{U}_x$. Но тогда существует открытое подмножество $U_x \subset \hat{U}_x$, где ограничение $s^\circ = \hat{s}^\circ|_{U_x}$ имеет вид $s^\circ = s^x_{U_x}$ для некоторого $s^x \in \mathcal{F}(U_x)$. На пересечении $U_x \cap U_y$ сечения s^x и s^y порождают одно и то же сечение $\bar{s}|_{U_x \cap U_y}$ и, согласно пункту 1) совпадают. Поэтому, ввиду аксиомы 2) пучка, существует сечение $s \in \mathcal{F}(U)$, порождающее сечение $\bar{s}$. $\square$

Следствие 2.1. *Каждый пучок изоморфен пучку непрерывных сечений некоторого накрытия.*

3. Когомологии с коэффициентами в пучке.

3.1. **Каноническая резольвента пучка.** *Далее мы считаем, что все рассматриваемые пучки являются пучками коммутативных групп.* Нам будет удобно считать, что пустому множеству $\emptyset \subset X$ также отвечает множество сечений $\mathcal{F}(\emptyset)$, состоящее из нуля группы.

Упражнение 3.1. *Доказать, что в этом случае соответствие $U \mapsto \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$ порождает предпучок.*

Пучок $\mathcal{C}$, порожденный предпучком $U \mapsto \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$, называется *фактор-пучком* $\mathcal{B}/\mathcal{A}$.

Говорят, что *последовательность гомоморфизмов групп $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ точна в B*, если $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(h)$. Говорят, что *последовательность морфизмов $\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C}$ пучков групп над X точна в $\mathcal{B}$*, если для любого $x \in X$ последовательность групп $\mathcal{A}_x \xrightarrow{g} \mathcal{B}_x \xrightarrow{h} \mathcal{C}_x$ точна в $\mathcal{B}_x$.

Упражнение 3.2. *Доказать, что естественное вложение подпучка в пучок вместе с естественной проекцией пучка на фактор-пучок порождают точную последовательность пучков $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$*

Упражнение 3.3. *Пусть $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на $\mathbb{C} - 0$, рассматриваемый как группа по сложению, $\mathcal{Z}$ — подпучок постоянных целочисленных функций и $\mathcal{O}^*$ — пучок не обращающихся в 0 голоморфных функций на $\mathbb{C} - 0$, рассматриваемый как группа по умножению. Тогда последовательность пучков $0 \to \mathcal{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$, где $\exp(f)(z) = e^{2\pi i f(z)}$, точна, а последовательность гомоморфизмов групп $0 \to \mathcal{Z}(\mathbb{C} - 0) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\mathbb{C} - 0) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*(\mathbb{C} - 0) \to 0$ не точна.*

Предыдущее упражнение дает пример точной последовательности последовательности пучков, порождающей не точную последовательность сечений. Неточности такого типа характеризуют пучок и являются, по существу, предметом *теории когомологий.*

Точная (во всех членах) последовательность пучков вида $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ называется *резольвентой пучка $\mathcal{F}$.*

Упражнение 3.4. *Доказать, что последовательность групп*

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots,$$

индуцированная резольвентой $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$, удовлетворяет условиям $\tilde{\alpha}_0\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_{n+1}\tilde{\alpha}_n = 0$ и точна в члене $\mathcal{F}(X)$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{F}$ и изоморфный ему пучок $\overline{\mathcal{F}}$ непрерывных сечений накрытия $\pi : Y \to X$. Рассмотрим пучок $\mathcal{E}(U) = \{s : U \to Y | \pi s = 1\}$ всех сечений накрытия π. Естественное вложение непрерывных сечений в произвольные порождает точную в $\mathcal{F}$ последовательность пучков $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}(\mathcal{F})$.

Положим $\mathcal{F}^0 = \mathcal{E}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}^1 = \mathcal{E}(\mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha))$ и обозначим через $\alpha_0 : \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha)) = \mathcal{F}^1$ композицию естественных гомоморфизмов пучков. Мы получили последовательность гомоморфизмов $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1$. Продолжим процесс, то есть положим $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{E}(\mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1}))$, и обозначим через $\alpha_n : \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1}) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1})) = \mathcal{F}^{n+1}$ композицию естественных гомоморфизмов пучков.

Упражнение 3.5. *Доказать, что последовательность пучков $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots$ является резольвентой.*

Построенная резольвента $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots$ называется *канонической резольвентой пучка* $\mathcal{F}$.

3.2. **Когомологии.** Пусть $\mathcal{F}$ — пучок над X, $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots$ — его каноническая резольвента и $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \dots$ — индуцированная последовательность групп. Тогда группы $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_0) = \mathcal{F}(X)$, $H^n(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})$ называются *n-тыми группами когомологий пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$*. Их прямая сумма $H^*(X, \mathcal{F})$ называется *(полной) группой когомологий пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$*.

Это понятие позволяет сопоставить группу произвольному пучку и использовать методы алгебры для изучения геометрических объектов. Для простейших (и важнейших) пространств и пучков это соответствие, другими методами, было впервые построено А. Пуанкаре. Следующая теорема показывает, что соответствие является функториальным.

Теорема 3.1. *Морфизм $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B}$ пучков над X порождает гомоморфизмы групп когомологий $h_n : H^n(X, \mathcal{A}) \to H^n(X, \mathcal{B})$ такие, что:*

1) $h_0 = h_X : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X)$ — гомоморфизм глобальных сечений;

2) если h — тождественный морфизм, то h_n — тождественный гомоморфизм для любого n;

3) если $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C}$ — последовательность морфизмов пучков, то $(lh)_n = l_n h_n$.

Доказательство. Рассмотрим накрытия $f : Y \to X$ и $g : Z \to X$, пучки непрерывных сечений которых изоморфны пучкам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Морфизм h порождает локальный гомеоморфизм, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

Диаграмма порождает морфизм $h_0(s) = hs$ пучков всех сечений накрытий. Этот морфизм замыкает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{A}^0 \arrow[d, "h_0"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{B}^0
\end{tikzcd}$$

где α и β — вложения непрерывных сечений в произвольные. Рассмотрим накрытия $f^0 : Y^0 \to X$ и $g^0 : Z^0 \to X$, пучки непрерывных сечений, порожденные пучками $\mathcal{A}^0/\mathrm{Im}(\alpha)$ и $\mathcal{B}^0/\mathrm{Im}(\beta)$ соответственно. Морфизм h_0 порождает локальный гомеоморфизм $\tilde{h}_0$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
Y^0 \arrow[r, "\tilde{h}_0"] \arrow[d, "f^0"] & Z^0 \arrow[d, "g^0"] \\
X \arrow[r, equal] & X
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма порождает морфизм h_1 пучков всех сечений накрытий, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{A}^0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "h_0"] & \mathcal{A}^1 \arrow[d, "h_1"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{B}^0 \arrow[r, "\beta_0"] & \mathcal{B}^1
\end{tikzcd}$$

Продолжая процесс, получаем коммутативную диаграмму морфизмов пучков

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{A}^0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "h_0"] & \mathcal{A}^1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "h_1"] & \ldots \mathcal{A}^n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "h_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{B}^0 \arrow[r, "\beta_0"] & \mathcal{B}^1 \arrow[r, "\beta_1"] & \ldots \mathcal{B}^n \arrow[r, "\beta_n"] & {}
\end{tikzcd}.$$

Она порождает коммутативную диаграмму гомоморфизмов групп

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & \mathcal{A}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_0"] \arrow[d, "\tilde{h}_0"] & \mathcal{A}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_1"] \arrow[d, "\tilde{h}_1"] & \ldots \mathcal{A}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_n"] \arrow[d, "\tilde{h}_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B}(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \mathcal{B}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_0"] & \mathcal{B}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_1"] & \ldots \mathcal{B}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_n"] & {}
\end{tikzcd}.$$

Если $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)$ и $b = \tilde{h}_n(a)$, то $\tilde{\beta}_n(b) = \tilde{\beta}_n(\tilde{h}(a)) = \tilde{h}_{n+1}(\tilde{\alpha}_n(a)) = 0$. Таким образом, $\tilde{h}_n(\mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)) \subset \mathrm{Ker}(\tilde{\beta}_n)$. Кроме того, если $a \in \mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})$ и $b = \tilde{h}_n(a)$, то $a = \tilde{\alpha}_{n-1}(\hat{a})$ и $b = (\tilde{\beta}_{n-1}(\tilde{h}_{n-1}\hat{a})) \in \mathrm{Im}(\tilde{\beta}_{n-1})$. Таким образом, $\tilde{h}_n(\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})) \subset \mathrm{Im}(\tilde{\beta}_{n-1})$. Следовательно, гомоморфизм $\tilde{h}_n$ порождает гомоморфизм $h_n : H^n(X, \mathcal{A}) \to H^n(X, \mathcal{B})$. Его свойства 1) и 2) непосредственно следуют из определений. Для доказательства свойства 3) рассмотрим коммутативную диаграмму резольвент

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{A}^1 & \xrightarrow{\alpha_1} & \dots\mathcal{A}^n & \xrightarrow{\alpha_n} \\
 & & \Big\downarrow h & & \Big\downarrow h^0 & & \Big\downarrow h^1 & & \Big\downarrow h^n & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 & \xrightarrow{\beta_0} & \mathcal{B}^1 & \xrightarrow{\beta_1} & \dots\mathcal{B}^n & \xrightarrow{\beta_n} \quad , \\
 & & \Big\downarrow l & & \Big\downarrow l^0 & & \Big\downarrow l^1 & & \Big\downarrow l^n & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{C}^0 & \xrightarrow{\gamma_0} & \mathcal{C}^1 & \xrightarrow{\gamma_1} & \dots\mathcal{C}^n & \xrightarrow{\gamma_n}
\end{array}
$$

порождающую коммутативную диаграмму групп

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha} & \mathcal{A}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_0} & \mathcal{A}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_1} & \dots\mathcal{A}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_n} \\
 & & \Big\downarrow \tilde h & & \Big\downarrow \tilde h_0 & & \Big\downarrow \tilde h_1 & & \Big\downarrow \tilde h_n & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B}(X) & \xrightarrow{\tilde\beta} & \mathcal{B}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_0} & \mathcal{B}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_1} & \dots\mathcal{B}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_n} \quad . \\
 & & \Big\downarrow \tilde l & & \Big\downarrow \tilde l_0 & & \Big\downarrow \tilde l_1 & & \Big\downarrow \tilde l_n & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & \mathcal{C}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma_0} & \mathcal{C}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma_1} & \dots\mathcal{C}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma_n}
\end{array}
$$

Из наших определений непосредственно следует, что морфизм пучков $l^n h^n$ порождает произведение гомоморфизмов $\tilde l_n \tilde h_n$ $\square$

4. Точные последовательности.

4.1. **Мягкие пучки.** Топологическое пространство X называется *нормальным*, если его точки замкнуты и любые два замкнутые непересекающиеся множества имеют непересекающиеся окрестности.

Покрытие замкнутыми множествами $X = \bigcup_{\alpha\in A} W_\alpha$ называется *консервативным*, если для любого $B \subset A$ множество $\bigcup_{\alpha\in B} W_\alpha$ замкнуто. Говорят, что покрытие $X = \bigcup_{\gamma\in A} W_\gamma$ *вписано в покрытие* $X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$, если для любого U_α существует W_γ такое, что $W_\gamma \subset U_\alpha$. Нормальное топологическое пространство X называется *паракомпактом*, если в любое его открытое покрытие можно вписать консервативное замкнутое покрытие.

Далее мы считаем, что все рассматриваемые топологические пространства являются нормальными паракомпактами.

Для нас важно, что к этому классу принадлежат все метризуемые пространства и, в частности, топологические многообразия. Топологическая структура пространства X порождает структуру топологического пространства на любом замкнутом подмножестве $S \subset X$. (Открытые подмножества S — это пересечения открытых подмножеств X с S.) Всякое замкнутое подмножество паракомпакта — тоже нормальный паракомпакт.

Для любого пучка $\mathcal{F}$ над над топологическим пространством X и замкнутого подмножества $S \subset X$ определим множество $\mathcal{F}(S)$ как индуктивный предел $\lim_{S\subset U} \mathcal{F}(U)$ множеств $\mathcal{F}(U)$ относительно отображений ограничения r^U_S. Другими словами, множество $\mathcal{F}(S)$ состоит из классов эквивалентности $\bigcup_{U\supset S} \mathcal{F}(U)/\sim_S$, где $s \in \mathcal{F}(V) \sim_S t \in \mathcal{F}(W)$, если существует открытое множество $S \subset U \subset V \cap W$ такое что $r^V_U(s) = r^W_U(t)$. Эта конструкция порождает отображения ограничения $r^X_S : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(S)$.

Образ сечения $s \in \mathcal{F}(U)$ при отображении ограничения r_V^U удобно обозначать $s|_V = r_V^U(s)$. В этой ситуации мы будем также говорить, что s — это *продолжение сечения* $t = s|_V$ *на* U.

Пучок $\mathcal{F}$ над топологическим пространством X называется ***мягким***, если отображение $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(S)$ сюръективно, для любого замкнутого подмножества $S \subset X$, то есть любое сечение над S продолжается до сечения над X.

Упражнение 4.1. *Ограничение мягкого пучка над* X *на замкнутое подмножество* $S \subset X$ *порождает мягкий пучок над* S.

Упражнение 4.2. *Доказать, что*

1. *Пучок* $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ *произвольных сечений накрытия — мягкий.*
2. *Пучок гладких функций на* $\mathbb{R}^n$ *— мягкий.*
3. *Пучок голоморфных функций на* $\mathbb{C}$ *— не мягкий.*
4. *Постоянный пучок (т.е. пучок локально постоянных функций) — не мягкий.*

Как и раньше, говоря о пучках мы будем иметь в виду пучки над фиксированным пространством X.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— мягкий пучок и* $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C} \to 0$ *— точная последовательность пучков. Тогда последовательность групп* $0 \to \mathcal{A}(X) \xrightarrow{h} \mathcal{B}(X) \xrightarrow{l} \mathcal{C}(X) \to 0$ *тоже точна.*

Доказательство. Точность в членах $\mathcal{A}(X)$ и $\mathcal{B}(X)$ следует из точности последовательности пучков в членах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с помощью аксиом пучка 1) и 2) соответственно. Отсюда следует точность последовательности $0 \to \mathcal{A}(S) \xrightarrow{h} \mathcal{B}(S) \xrightarrow{l} \mathcal{C}(S) \to 0$ в членах $\mathcal{A}(S)$ и $\mathcal{B}(S)$ для любого замкнутого подмножества $S \subset X$.

Докажем точность в члене $\mathcal{C}(X)$. Пусть $c \in \mathcal{C}(X)$. Тогда для каждого $x \in X$ существует окрестность $x \in U$ и сечение $b \in \mathcal{B}(U)$ такие, что $l(b) = c|_U$. Покроем пространство X парами (U_j, b_j) такого типа. Рассмотрим консервативное покрытие $\{S_i\}$, вписанное в покрытие $\{U_i\}$. Оно порождает множество пар (S_i, s_i), где $s_i \in \mathcal{B}(S_i)$ и $l(s_i) = c|_{S_i}$. Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{S}$ всех пар (S, s), где S — объединение множеств из $\{S_i\}$ и $l(s) = c|_S$. Введем на $\mathfrak{S}$ частичный порядок, считая, что $(S, s) \preceq (S', s')$, если $S \subset S'$ и $s'|_S = s$. Любая упорядоченная цепочка таких пар имеет верхнюю границу — объединение всех элементов цепочки. Следовательно, согласно лемме Цорна, существует пара $(\bar{S}, \bar{s}) \in \mathfrak{S}$ такая, что $(S, s) \preceq (\bar{S}, \bar{s})$ для всех $(S, s) \in \mathfrak{S}$. Осталось доказать, что $\bar{S} = X$. Пусть это не так. Тогда существует пара $(S_0, s_0) \in \mathfrak{S}$ такая, что $S_0 \not\subseteq \bar{S}$ и $l(\bar{s} - s_0) = 0$ на $S_0 \bigcap \bar{S}$. Согласно упражнению 4.1 из уже доказанной точности последовательности групп в члене $\mathcal{B}(X)$ следует точность соответствующей последовательности групп в члене $\mathcal{B}(S_0 \bigcap \bar{S})$. Таким образом существует сечение $a \in \mathcal{A}(S_0 \bigcap \bar{S})$ такое, что $h(a) = \bar{s} - s_0$. Используя мягкость пучка $\mathcal{A}$, продолжим сечение a до $a \in \mathcal{A}(X)$. Рассмотрим сечение $\tilde{s} \in \mathcal{B}(S_0 \bigcup \bar{S})$, где $\tilde{s}|_{\bar{S}} = \bar{s}$ и $\tilde{s}|_{S_0} = s_0 + h(a)|_{S_0}$. Тогда $(S_0 \bigcup \bar{S}, \tilde{s}) \in \mathfrak{S}$, что противоречит максимальности $(\bar{S}, \bar{s})$. □

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *— мягкие пучки и* $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C} \to 0$ *— точная последовательность пучков. Тогда пучок* $\mathcal{C}$ *— мягкий.*

Доказательство. Пусть $S \subset X$ — произвольное замкнутое множество и $c \in \mathcal{C}(S)$. Тогда, согласно теореме 4.1, существует сечение $b \in \mathcal{B}(S)$ такое, что $l(b) = c$.

Используя мягкость пучка $\mathcal{B}$, продолжим сечение b до сечения $\tilde{b} \in \mathcal{B}(X)$ и положим $\tilde{c} = l(\tilde{b})$. Тогда $\tilde{c}|_S = c$. □

Теорема 4.3. *Пусть* $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ *— точная последовательность, состоящая из мягких пучков на* X. *Тогда последовательность групп* $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$ *тоже точна.*

Доказательство. Положим $K^0 = \mathcal{F}$ и $K^n = \mathrm{Ker}(\alpha_n)$ при $n > 0$. Индукция по n и теорема 4.2 позволяет доказать, что $0 \to K^n \to \mathcal{F}^n \to K^{n+1} \to 0$ — точная последовательность мягких пучков. Согласно теореме 4.1, отсюда следует точность последовательности групп $0 \to K^n(X) \to \mathcal{F}^n(X) \to K^{n+1}(X) \to 0$ и, в частности, $\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_n) = K^{n+1}(X)$. А это и есть утверждение теоремы. □

Следствие 4.1. *Если* $\mathcal{F}$ *— мягкий пучок, то* $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ *при* $n > 0$.

Доказательство. Каноническая резольвента пучка $\mathcal{F}$ состоит из мягких пучков. □

4.2. **Длинная точная последовательность.**

Теорема 4.4. *Точная последовательность пучков* $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C} \to 0$ *порождает точную последовательность групп когомологий* $0 \to H^0(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{h_0} H^0(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{l_0} H^0(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{h_1} H^1(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{l_1} H^1(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_1} H^2(X, \mathcal{A}) \ldots$, *называемую длинной точной последовательностью.*

Доказательство. Канонические резольвенты пучков порождают коммутативную диаграмму групп, где, ввиду теоремы 4.1, все столбцы, начиная со второго, точны.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & \mathcal{A}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_0"] \arrow[d, "\tilde{h}_0"] & \mathcal{A}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_1"] \arrow[d, "\tilde{h}_1"] & \ldots \mathcal{A}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_n"] \arrow[d, "\tilde{h}_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B}(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "\tilde{l}"] & \mathcal{B}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_0"] \arrow[d, "\tilde{l}_0"] & \mathcal{B}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_1"] \arrow[d, "\tilde{l}_1"] & \ldots \mathcal{B}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_n"] \arrow[d, "\tilde{l}_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d] & \mathcal{C}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_0"] \arrow[d] & \mathcal{C}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_1"] \arrow[d] & \ldots \mathcal{C}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_n"] \arrow[d] & {} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Нетрудно убедиться, что $\tilde{h}_n(\mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)) \subset \mathrm{Ker}(\tilde{\beta})$ и $\tilde{h}_n(\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_n)) \subset \mathrm{Im}(\tilde{\beta})$. Таким образом, гомоморфизмы $\{\tilde{h}_n\}$ порождают гомоморфизмы h_n. Аналогично, гомоморфизмы $\{\tilde{l}_n\}$ порождают гомоморфизмы l_n, причем $l_n h_n = 0$.

Построим отображение δ_n. Рассмотрим $c \in \mathrm{Ker}(\tilde{\gamma}_n)$. Ввиду точности столбца существует элемент $b \in B^n(X)$ такой, что $\tilde{l}_n(b) = c$. Положим $b' = \tilde{\beta}_n b$. Тогда $\tilde{l}_{n+1} b' = \tilde{l}_{n+1}(\tilde{\beta}_n b) = \tilde{\gamma}_n(\tilde{l}_n b) = \tilde{\gamma}_n(c) = 0$. Ввиду точности столбца существует элемент $a \in A^{n+1}(X)$ такой, что $\tilde{h}_{n+1}(a) = b'$. Более того, $\tilde{h}_{n+2}(\tilde{\alpha}_{n+1} a) = \tilde{\beta}_{n+1}(\tilde{h}_{n+1} a) = \tilde{\beta}_{n+1} b' = \tilde{\beta}_{n+1} \tilde{\beta}_n b = 0$. Ввиду точности столбца отсюда следует, что $\tilde{\alpha}_{n+1} a = 0$, то есть $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_{n+1})$. Элемент b' определен с точностью до $\mathrm{Ker}(\tilde{l}_n) = \mathrm{Im}(\tilde{h}_n)$. Таким образом, элемент a определен с точностью до $\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_n)$. Следовательно, соответствие $b \mapsto a$ порождает отображение $\tilde{\delta}_n : \mathrm{Ker}(\tilde{\gamma}_n) \to H^{n+1}(X, \mathcal{A})$.

Пусть теперь $c \in \mathrm{Im}(\tilde{\gamma}_{n-1})$, то есть $c = \tilde{\gamma}_{n-1}c"$ для некоторого $c" \in C^{n-1}(X)$. Ввиду точности столбца, существует элемент $b" \in B^{n-1}(X)$ такой, что $\tilde{l}_{n-1}(b") = c"$. Положим $b = \tilde{\beta}_{n-1}b"$. Ввиду коммутативности диаграммы $\tilde{l}_n b = c$. Используя этот b в описанной выше конструкции, находим, что $\tilde{\delta}_n c = 0$ и, следовательно, $\tilde{\delta}_n$ порождает гомоморфизм $\delta_n : H^n(X, \mathcal{C}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{A})$. Из построения сразу следует, что $\delta_n l_n = \delta_n h_{n+1} = 0$

Докажем что $\mathrm{Im}(\delta_n) \supset \mathrm{Ker}(h_{n+1})$. Пусть $a \in \mathrm{Ker}(h_{n+1})$. Тогда $\tilde{h}_{n+1}(\tilde{a}) = \tilde{\beta}_n(\tilde{b})$, где $\tilde{a} \in a$ и $\tilde{b} \in B_n$. Положим $\tilde{c} = \tilde{l}(\tilde{b}) \in \mathrm{Ker}(\tilde{\gamma}_n)$. Тогда $\tilde{\gamma}_n(\tilde{c}) \in a$.

Докажем что $\mathrm{Im}(h_n) \supset \mathrm{Ker}(l_n)$. Пусть $b \in \mathrm{Ker}(l_n)$. Тогда $\tilde{l}_n(\tilde{b}) = \tilde{\gamma}_{n-1}(\tilde{c})$, где $\tilde{b} \in b$ и $\tilde{c} \in C_{n-1}(X)$. В виду точности столбца $\tilde{c} = \tilde{l}_{n-1}(\tilde{b})$, где $\tilde{b} \in B_{n-1}$. Тогда $\tilde{b}' = \tilde{b} - \tilde{\beta}_{n-1}(\tilde{b}) \in b$ и $\tilde{l}_n(\tilde{b}') = 0$. Значит $\tilde{b}' = \tilde{h}_n(\tilde{a})$, где $\tilde{a} \in A_n(X)$. Соотношение $\tilde{b}' \in \mathrm{Ker}(\tilde{\beta}_n)$ влечет $\tilde{a} \in \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)$

Докажем что $\mathrm{Im}(l_n) \supset \mathrm{Ker}(\delta_n)$. Пусть $c \in \mathrm{Ker}(\delta_n)$. Тогда существуют такие $\tilde{c} \in c$, $\tilde{b} \in B_n(X)$ и $\tilde{a} \in A_{n+1}(X)$ такие ,что $\tilde{h}_{n+1}(\tilde{a}) = \tilde{\beta}_n(\tilde{b})$ и $\tilde{l}_n(\tilde{b}) = \tilde{c}$, причем $\tilde{a} = \tilde{\alpha}_n(\tilde{a}')$, где $\tilde{a}' \in A_n(X)$. Положим $\tilde{b}' = \tilde{b} - \tilde{h}_n(\tilde{a}')$. Тогда $\tilde{b}' \in \mathrm{Ker}(\beta_n)$ и $\tilde{l}_n(\tilde{b}') = \tilde{c}$, то есть $l_n(b') = c$, где b' порожден $\tilde{b}'$.

Обратные включения следуют из точности столбцов диаграммы. □

Участвующие в длинной точной последовательности операторы δ_i называются *связывающими*

Упражнение 4.3. *Доказать, что морфизм (т.е. коммутативная диаграмма) точных последовательностей пучков*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B}' & \longrightarrow & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

порождает морфизм (т.е. коммутативную диаграмму) длинных точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{B}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{C}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{B})... \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{A}') & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{B}') & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{C}') & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{A}') & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{B}')...
\end{array}$$

5. Аксиоматическая теория когомологий.

5.1. **Ацикличные резольвенты.** Резольвента $D_{\mathcal{F}} = \{0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\delta} \mathcal{D}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{D}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\delta_2} ...\}$ пучка $\mathcal{F}$ называется *ацикличной*, если $H^n(X, D^m) = 0$ для всех $n > 0, m \geq 0$.

Свяжем с резольвентой $D_{\mathcal{F}}$ последовательность сечений $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}} \mathcal{D}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_0} \mathcal{D}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_1} \mathcal{D}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_2} ....$ Положим $H^0(X, D_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}(X)$, $H^n(X, D_{\mathcal{F}}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1})$ для $n > 0$.

Теорема 5.1. *Для произвольной резольвенты* $D_{\mathcal{F}} = \{0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\delta} \mathcal{D}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{D}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\delta_2} ...\}$ *существуют естественные гомоморфизмы* $\gamma^n : H^n(X, D_{\mathcal{F}}) \to H^n(X, \mathcal{F})$. *Эти гомоморфизмы являются изоморфизмами, если* $D_{\mathcal{F}}$ *— ацикличная резольвента.*

Доказательство. Положим $K^0 = \mathcal{F}$ и $K^n = \mathrm{Ker}(\delta_n)$ при $n > 0$. Тогда последовательность $0 \to K^{n-1} \to \mathcal{D}^{n-1} \overset{\delta_{n-1}}{\to} K^n \to 0$ точна. Рассмотрим ее длинную точную последовательность

$$0 \to H^0(X, K^{n-1}) \to H^0(X, \mathcal{D}^{n-1}) \overset{\tilde{\delta}_{n-1}}{\to} H^0(X, K^n) \overset{\tilde{\gamma}_1^n}{\to} H^1(X, K^{n-1}) \to H^1(X, \mathcal{D}^{n-1}) \dots .$$

С другой стороны,

$$H^n(X, D_{\mathcal{F}}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1}) = K^n(X)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1}) = H^0(X, K^n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1}).$$

Таким образом, гомоморфизм $\tilde{\gamma}_1^n$ порождает мономорфизм $\gamma_1^n : H^n(X, D_{\mathcal{F}}) \to H^1(X, K^{n-1})$, являющийся изоморфизмом при $H^1(X, \mathcal{D}^{n-1}) = 0$.

Повторяя эти рассуждения для точной последовательности $0 \to K^{n-r} \to \mathcal{D}^{n-r} \overset{\delta_{n-r}}{\to} K^{n-r+1} \to 0$, находим точную последовательность

$$... \to H^{r-1}(X, \mathcal{D}^{n-r}) \overset{\tilde{\delta}_{n-r}}{\to} H^{r-1}(X, K^{n-r+1}) \overset{\tilde{\gamma}_r^n}{\to} H^r(X, K^{n-r}) \to H^r(X, \mathcal{D}^{n-r}) \dots .$$

Она порождает гомоморфизм $\gamma_r^n : H^{r-1}(X, K^{n-r+1}) \to H^r(X, K^{n-r})$, являющийся изоморфизмом при $H^{r-1}(X, \mathcal{D}^{n-r}) = H^r(X, \mathcal{D}^{n-r}) = 0$. Таким образом гомоморфизм

$$\gamma^n = \gamma_n^n \gamma_{n-1}^n \gamma_{n-2}^n ... \gamma_1^n : H^n(X, D_{\mathcal{F}}) \to H^1(X, K^{n-1}) \to H^2(X, K^{n-2}) ... \to H^n(X, K^0) = H^n(X, \mathcal{F})$$

, является изоморфизмом, если $H^n(X, D^m) = 0$ для всех $n > 0, m \geq 0$. □

Следствие 5.1. *Когомологии определяются любой мягкой резольвентой.*

Ниже мы увидим, что многие важные пучки имеют естественные ацикличные (часто мягкие) резольвенты. В этих случаях теорема 5.1 дает эффективную возможность вычислять когомологии с коэффициентами в пучках.

5.2. **Аксиоматический подход.** Используя тот же подход, что и при доказательстве теоремы 5.1, можно доказать следующее утверждение

Упражнение 5.1. *Морфизм резольвент*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}^0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^1 & \longrightarrow & ... \\
 & & \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}^0 & \longrightarrow & \mathcal{B}^1 & \longrightarrow & ...
\end{array}$$

порождает гомоморфизмы групп $\tilde{f}_n : H^n(X, A_{\mathcal{F}}) \to H^n(X, B_{\mathcal{F}})$. *Эти гомоморфизмы являются изоморфизмами, если* f *— изоморфизм пучков и обе резольвенты ацикличны.*

Более того, доказательство теоремы 5.1 использует лишь доказанные нами общие свойства групп когомологий и не использует конструкцию, с помощью которой мы их определяли. Это позволяет описать когомологии как аксиоматическую теорию.

Упражнение 5.2. *Пусть* $\mathcal{F} \mapsto \tilde{H}^*(X, \mathcal{F})$ *— произвольное соответствие, сопоставляющее пучку абелевых групп* $\mathcal{F}$ *над топологическим пространством* X *семейство абелевых групп* $\tilde{H}^*(X, \mathcal{F}) = \{\tilde{H}^n(X, \mathcal{F}) | n \geq 0\}$ *таким образом, что*

$\tilde{H}^0(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ *и выполняются утверждения следующих теорем, следствий и упражнений:*

а) Следствие 4.1(нормировка)

б) Теорема 3.1 (функториальность соответствия)

в) Теорема 4.4(длинная точная последовательность)

г) Упражнение 4.3 (функториальность длинной точной последовательности).

Тогда существуют изоморфизмы групп $\tilde{H}^n(X,\mathcal{F}) \cong H^n(X,\mathcal{F})$, *переводящие друг в друга соответствующие точные последовательности.*

Простота аксиоматики наводит на мысль о существовании других конструкций, приводящих к когомологиям. Важные примеры таких конструкций: когомологии Чеха и когомологии де Рама (для постоянных пучков на гладких многообразиях) приводятся ниже.

6. Когомологии Чеха.

6.1. **Когомологии покрытия.** Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие топологического пространства X открытыми множествами. Любой упорядоченный набор с непустым пересечением из $q+1$ элементов этого покрытия $\sigma = (U_0, U_1, ..., U_q)$ назовем *q-симплексом* покрытия $\mathcal{U}$. Пересечение $|\sigma| = \bigcap_{i=0}^q U_i$ назовем *носителем* симплекса σ. q-симплекс σ порождает $(q-1)$-симплексы $\sigma_i = (U_0, U_1, ...U_{i-1}, U_{i+1}, ..., U_q)$.

Рассмотрим пучок абелевых групп $\mathcal{G}$ над топологическим пространством X. Отображение, сопоставляющее каждому q-симплексу σ сечение $f(\sigma) \in \mathcal{G}(|\sigma|)$ над его носителем, называем *q-цепью покрытия $\mathcal{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{G}$*. Множество всех q-цепей $C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ образует абелеву группу. Используя отображения ограничения $r_V^U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$, определим *кограничный оператор* $\delta : C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{G})$, считая, что $(\delta f)(\sigma) = \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i r_{|\sigma|}^{|\sigma_i|} f(\sigma_i)$ для любого $f \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$.

Упражнение 6.1. *Доказать, что* $\delta^2 = 0$.

Положим $Z^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) = \mathrm{Ker}(\delta : C^q(\mathcal{U},\ \mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{G}))$ и $B^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) = \mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}))$. Фактор-группа $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) = Z^q(\mathcal{U},\mathcal{G})/B^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ называется *q-тыми когомологиями Чеха для покрытия $\mathcal{U}$*.

Покрытие $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ назовем *измельчением* покрытия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, если для любого $V_\alpha \in \mathcal{V}$ существует $U_\beta \in \mathcal{U}$, содержащее V_α. Рассмотрим соответствие F, сопоставляющее каждому симплексу $\varsigma = (V_0, V_1, ..., V_q)$ симплекс $\sigma(\varsigma) = (U_0, U_1, ..., U_q)$, где $V_i \subset U_i$ для всех i. Сопоставим коцепи $f \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ ее измельчение, то есть коцепь $\tilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(f) \in C^q(\mathcal{V},\mathcal{G})$ такую, что $\tilde{\varphi}^q_{\mathcal{F}}(f)(\varsigma) = r_{|\varsigma|}^{|\sigma(\varsigma)|} f(\sigma(\varsigma))$.

Можно доказать, что отображение $\tilde{\varphi}_{\mathcal{F}}$ порождает гомоморфизм $\varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : \check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to \check{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{G})$, зависящий от покрытий $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}$, но не зависящий от соответствия F.

Рассмотрим теперь объединение всех групп $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$, отвечающих всем открытым покрытиям $\mathcal{U}$ множества X. Введем между элементами этих групп отношение эквивалентности, считая, что $u \in \check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ эквивалентен $v \in \check{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{G})$, если $\varphi_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(u) = \varphi_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}(v)$ для некоторого измельчения $\mathcal{W}$ покрытий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. (Конструкция такого типа называется *индуктивным пределом* по множеству покрытий). Классы эквивалентности образуют абелеву группу $\check{H}^q(X,\mathcal{G})$, называемую *$q$- той группой когомологий Чеха пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{G}$*.

Упражнение 6.2. *Доказать, что когомологии Чеха $\check{H}^*(X,\mathcal{G})$ удовлетворяют аксиомам из упражнения 5.2 и, следовательно, изоморфны когомологиям $H^*(X,\mathcal{G})$.*

6.2. **Теорема Лере.**

Лемма 6.1. *Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие топологического пространства X открытыми множествами. Тогда $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$ и, если $\mathcal{G}$ — пучок произвольных сечений накрытия, то $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) = 0$ при $q > 0$.*

Доказательство. Согласно аксиоме 2) пучка, из условия $f \in Z^0(\mathcal{U},\mathcal{G})$ следует существование сечения $s \in \mathcal{G}(X)$ такого, что $s|_U = f(U)$ для любого $U \in \mathcal{U}$. Пусть теперь $\mathcal{G}$ — пучок произвольных сечений некоторого накрытия, f — q-цепь, Σ^q — множество q-симплексов и $|\Sigma^q|$ — объединение их носителей. Рассмотрим произвольный $(q-1)$-симплекс σ^{q-1}. Как и в предыдущем рассуждении, из условия $f \in Z^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ следует существование сечения $s \in \mathcal{G}(|\sigma^{q-1}| \cap |\Sigma^q|)$ такого, что $s|_{|\sigma^q|} = f(\sigma^q)$ для любого q-симплекса σ^q, получающегося из $(q-1)$-симплекса σ^{q-1} добавлением элемента покрытия $\mathcal{U}$. Рассмотрим теперь произвольное сечение $g(\sigma^{q-1}) \in \mathcal{G}(|\sigma^{q-1}|)$, совпадающее с s на $|\sigma^{q-1}| \cap |\Sigma^q|$. Выбирая такое сечение для каждого $(q-1)$-симплекса, получаем $(q-1)$-цепь g такую, что $\delta(g) = f$.
□

Теорема 6.1. *(Лере) Пусть $\mathcal{G}$ — пучок абелевых групп над X и покрытие $\mathcal{U}$ пространства X таково, что $H^q(|\sigma|,\mathcal{G}) = 0$ при $q > 0$ для любого симплекса σ этого покрытия. Тогда $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) = H^q(X,\mathcal{G})$.*

Доказательство. Рассмотрим каноническую резольвенту $0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\gamma} \dots$ пучка $\mathcal{G}$. Она порождает коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G}(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & \mathcal{G}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & \mathcal{G}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & \dots\mathcal{G}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma} \\
 & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta \\
0 & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & \dots C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}^n) & \xrightarrow{\tilde\gamma} \\
 & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta \\
0 & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & \dots C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}^n) & \xrightarrow{\tilde\gamma} \\
 & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta \\
0 & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & \dots C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}^n) & \xrightarrow{\tilde\gamma} \\
 & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta
\end{array}
$$

Условие $H^q(|\sigma|,\mathcal{G}) = 0$ означает, что последовательность $0 \to \mathcal{G}(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde\gamma} \mathcal{G}^0(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde\gamma} \mathcal{G}^1(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde\gamma} \mathcal{G}^2(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde\gamma} \dots$ точна для любого симплекса σ покрытия $\mathcal{U}$. Отсюда следует точность всех строк диаграммы кроме, быть может, первой. Из леммы 6.1 следует следует точность всех столбцов диаграммы кроме, быть может, первого.

Сопоставим теперь элементу $f^q \in \operatorname{Ker}(\delta : C^q(\mathcal{U},\ \mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{G}))$ некоторый элемент из $\operatorname{Ker}(\tilde\gamma : \mathcal{G}^q(X) \to \mathcal{G}^{q+1}(X))$. Положим $\tilde{f}^q = \tilde\gamma f^q$. Тогда $\delta\tilde{f}^q = \tilde\gamma\delta f^q = 0$. Используя точность столбца, находим элемент $f^{q-1} \in C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{G}^0)$ такой, что $\delta f^{q-1} = \tilde{f}^q$. Положим $\tilde{f}^{q-1} = \tilde\gamma f^{q-1}$. Тогда $\delta\tilde{f}^{q-1} = \tilde\gamma^2 f^q = 0$. Используя точность столбца, находим элемент $f^{q-2} \in C^{q-2}(\mathcal{U},\mathcal{G}^1)$ такой, что $\delta f^{q-2} = \tilde{f}^{q-1}$. Продолжая процесс, находим элемент $f \in \mathcal{G}^q(X)$ такой, что $\delta\tilde\gamma f = 0$. Ввиду мономорфности δ отсюда следует, что $\tilde\gamma f = 0$. Нетрудно проследить, что произвол в выборе элементов f^i не меняет когомологический класс $f + \operatorname{Im}(\tilde\gamma : \mathcal{G}^{q-1}(X) \to \mathcal{G}^q(X))$ элемента f. Более того, наша конструкция переводит группу $\operatorname{Im}(\delta : C^{q-1}(\mathcal{U},\ \mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}))$ в группу $\operatorname{Im}(\tilde\gamma : \mathcal{G}^{q-1}(X) \to \mathcal{G}^q(X))$. Таким образом, мы построили гомоморфизм $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to H^q(X,\mathcal{G})$. Эпиморфность отображения доказывается полностью аналогичной "инверсной"конструкцией, позволяющей сопоставить элементу из $\mathcal{G}^q(X)$ элемент из $C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$. Группе $\operatorname{Im}(\tilde\gamma : \mathcal{G}^{q-1}(X) \to \mathcal{G}^q(X))$ отвечает при этом группа $\operatorname{Im}(\delta : C^{q-1}(\mathcal{U},\ \mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}))$ и, следовательно, эпиморфизм является мономорфизмом.

□

Покрытия $\mathcal{U}$ со свойством $H^q(|\sigma|,\mathcal{G}) = 0$ для любого симплекса σ называются *покрытиями Лере для пучка* $\mathcal{G}$. Такие покрытия имеют большинство важных для приложения пучков. В этом случае теорема Лере дает эффективный метод вычисления когомологий. Кроме того, в виду упражнения 6.2, конструкция из доказательства теоремы дает явное описание изоморфизма когомологий Чеха и когомологий в нашем определении для пучков, допускающих покрытие Лере.

7. Когомологии де Рама.

7.1. **Пучки модулей.** Кроме пучков групп мы будем рассматривать пучки колец и пучки модулей над пучками колец. Для того чтобы наделить пучок $\mathcal{M}$ структурой пучка модулей над пучком колец $\mathcal{R}$, надо наделить структурой модуля над $\mathcal{R}(U)$ множества сечений $\mathcal{M}(U)$ и потребовать, чтобы эти структуры были согласованы с ограничениями сечений пучков.

Упражнение 7.1. *Дать полное определение пучка модулей над пучком колец.*

Пример 7.1. *1. Пучки произвольных функций на X со значениями в кольце $\mathbb{K}$ (например, в кольце вещественных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел) является пучком колец.*

2. Подпучок локально постоянных функций со значениями в кольце $\mathbb{K}$ (постоянный пучок) также является пучком колец и будет обозначаться той же буквой $\mathbb{K}$.

3. Пучок $\mathcal{E}$ гладких функций на гладком многообразии X является пучком колец. Пучки гладких тензорных полей фиксированного типа являются пучками модулей над $\mathcal{E}$. Важным для нас примером будет пучок $\mathcal{E}^p$ вещественных дифференциальных форм степени p.

Топологическое пространство X называется нормальным, если выполнена следующая аксиома отделимости. Для любых не пересекающихся замкнутых подмножеств $S, T \subset X$ существуют содержащие их непересекающиеся открытые множества $X \supset U \supset S$, $X \supset V \supset T$. Нормальными являются, в частности, топологические многообразия. Далее мы считаем, что все рассматриваемые топологические пространства X нормальны.

Теорема 7.1. *Пучок модулей над мягким пучком колец $\mathcal{R}$ с единицей является мягким.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ —пучок модулей над $\mathcal{R}$. Рассмотрим произвольное сечение $s \in \mathcal{M}(S)$ над замкнутым множеством $S \subset X$. Рассмотрим открытое множество $U \supset S$ и продолжим сечение s до сечения $\tilde{s} \in \mathcal{M}(U)$. Рассмотрим замкнутое множество $T = X - U$ и не пересекающиеся открытые множества $W \supset S$ и $V \supset T$. Положим $K = X - W$. Рассмотрим сечение $f \in \mathcal{R}(S \bigcup K)$, принимающее значение 1 на S и значение 0 на K. Ввиду мягкости пучка $\mathcal{R}$ оно продолжается до сечения $\tilde{f} \in \mathcal{R}(X)$. Но тогда произведение $\tilde{f}\tilde{s}$ порождает сечение $\bar{s} \in \mathcal{M}(X)$, продолжающее s.

□

Следствие 7.1. *Пучки тензорных полей на гладком многообразии мягкие.*

Доказательство. Согласно теореме 7.1, нам достаточно доказать, что пучок гладких функций на гладком многообразии мягок. Это следует из классической теоремы математического анализа: для непересекающихся замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и компакта $B \subset \mathbb{R}^n$ существует гладкая функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi(A) = 1$ и $\varphi(B) = 0$.

□

7.2. **Теорема де Рама.** *Далее мы считаем, что все рассматриваемые пучки определены над гладким многообразием.* Покажем, что когомологии с коэффициентами в постоянном пучке $\mathbb{R}$ над гладким многообразием X совпадают с когомологиями де Рама и сингулярными когомологиями. Для этого, следуя нашим определениям, построим соответствующие резольвенты пучка $\mathbb{R}$ и докажем их ацикличность.

Обозначим через $d^p : \mathcal{E}^p \to \mathcal{E}^{p+1}$ оператор дифференцирования дифференциальных форм. Тогда $d^{p+1}d^p = 0$. Более того, согласно лемме Пуанкаре, условие $d(f) = 0$ локально эквивалентно условию $f = d(g)$. Таким образом, последовательность пучков $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d^2} ...$ является резольвентой. Последовательность сечений $0 \to \mathbb{R}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{\tilde{d}^0} \mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{\tilde{d}^1} \mathcal{E}^2(X) \xrightarrow{\tilde{d}^2} ...$ порождает фактор-группы $H^n_{Dr}(X, R) = \mathrm{Ker}(\tilde{d}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{d}_{n-1})$, которые называются *когомологиями де Рама.* Рассмотренная резольвента пучков является мягкой ввиду следствия 7.1. Таким образом, она ациклична (следствие 4.1) и, значит, порождает когомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$ (теорема 5.1), то есть $H^n(X, \mathbb{R}) = H^n_{Dr}(X, \mathbb{R})$.

Рассмотрим теперь другую резольвенту пучка $\mathbb{R}$. Опишем *пучок сингулярных коцепей* $\mathcal{L}^p$ на гладком многообразии X, играющий важную роль в топологии. Обозначим через Δ^p p-мерный симплекс с упорядоченными вершинами. Сингулярной цепью степени p на $U \subset X$ называется конечная формальная линейная комбинация с вещественными коэффициентам кусочно-гладких отображений $\sum_i r_i\{(f_i : \Delta^p \to U)\}$. Они образуют векторное пространство $\mathcal{L}_p$. Сингулярной коцепью степени p на $U \subset X$ называется вещественный линейный функционал на $\mathcal{L}_p$. Пучок $\mathcal{L}^p$ порождается предпучком, сопоставляющим открытому подмножеству $U \subset X$ множество всех его сингулярных коцепей. Стандартная в топологии операция, сопоставляющая симплексу $\Delta^p = \{1, 2, ..., p\}$ линейную комбинацию симплексов $\sum_i(-1)^i\{1, 2, ..., \hat{i}, ...p\}$(где $\hat{}$ означает пропуск вершины), задает оператор $\delta^{p-1} : \mathcal{L}^{p-1} \to \mathcal{L}^p$. Легко доказать, что $\delta^{p+1}\delta^p = 0$. Таким образом, мы получили последовательность пучков $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{L}^2 \xrightarrow{\delta^2} \dots$, порождающую последовательность сечений $0 \to \mathbb{R}(X) \xrightarrow{\delta} \mathcal{L}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}^0} \mathcal{L}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}^1} \mathcal{L}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}^2} \dots$. Факторгруппы $H^n_{sin}(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1})$ дают одно из известных в топологии определений *сингулярных когомологий.*

Легко доказать, что для шара S группы $H^n_{sin}(S, \mathbb{R})$ равны 0 при $n > 0$. Отсюда следует точность последовательности пучков $\mathcal{L}^p$. Эти пучки мягкие, поскольку всякую сингулярную коцепь на $U \subset X$ можно рассматривать как сингулярную коцепь на X. Согласно следствию 4.1 и теореме 5.1 отсюда следует, что $H^n(X, \mathbb{R}) = H^n_{sin}(X, \mathbb{R})$.

Таким образом, мы доказали

Теорема 7.2. *(де Рам) Когомологии де Рама изоморфны сингулярным когомологиям.*

Упражнение 7.2. *Используя упражнение 5.1, доказать, что изоморфизм, о котором идет речь в теореме, порождается интегрированием дифференциальных форм по сингулярным цепям.*

8. Векторные расслоения.

8.1. **Определения и примеры.** Гладкое отображение гладких многообразий $\pi : E \to X$ называется *локально тривиальным гладким векторным расслоением ранга* r, с *тотальным пространством* E и *базой* X, если

1) *Слой* $E_p = \pi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in X$ наделен структурой вещественного векторного пространства размерности r;

2) Существует гладкий атлас $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ гладкого многообразия X и гладкие отображения $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$, называемые *локальной тривиализацией*, такие, что

а) отображения $h_\alpha|_{E_p} : E_p \to p \times \mathbb{R}^r$ (где $p \in U_\alpha$) являются изоморфизмами векторных пространств;

б)функции $h_\alpha h_\beta^{-1} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \to (U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$, порождают гладкие *функции перехода* $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \bigcap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$.

Далее мы будем для краткость, говоря о "векторное расслоении"мы будем всегда иметь в виду "локально тривиальное гладкое векторное расслоении".

Лемма 8.1. *Пусть* $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ *гладкого многообразия* X*. Тогда семейство гладких отображений* $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R}) | \alpha, \beta \in \Upsilon\}$ *является семейством функцией перехода некоторого векторного расслоения* $\pi : E \to X$*, если и только если* $g_{\alpha\alpha} = 1$ *и* $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ *на* $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$ *для любых* $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$.

Доказательство. Равенство $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ для семейства функций перехода векторного расслоения очевидно. Докажем обратное утверждение. Рассмотрим семейство гладких отображений $\mathcal{G}$ такое, что $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$. Рассмотрим $\tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in \Upsilon} U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Точки $(p, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $(p, w) \in U_\beta \times \mathbb{R}^r$ будем считать эквивалентными, если $v = g_{\alpha\beta} w$. Условия $g_{\alpha\alpha} = 1$ и $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ гарантирует, что наше определение действительно порождает отношение эквивалентности. Факторизация множества $\tilde{E}$ по этой эквивалентности порождает нужное нам расслоение с локальными тривиализациями $h_\alpha(p, v) = (p, v)$. $\square$

Таким образом, мы можем задавать векторные расслоения над X, указывая покрытие многообразия X и семейство функций перехода, удовлетворяющее лемме 8.1.

Пример 8.1. *1) Тривиальное расслоение $\pi : X \times \mathbb{R}^r \to X$.*

2) Вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ — это множество всех одномерных подпространств векторного пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, ..., x_n)\}$. Тавтологическое расслоением над вещественным проективным пространством $\pi : E \to \mathbb{R}P^n$ называется расслоение, слой которого над точкой $p \in \mathbb{R}P^n$ состоит из прямой, представляющей точку p. Для описания этого расслоения рассмотрим множество ненулевых векторов $M = \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ и отображение $\rho : M \to \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее вектору $m \in M$ порожденное им подпространство $[m] = \{\lambda m \in \mathbb{R}^{n+1} | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Множество M покрывается подмножествами $\tilde{U}_i = \{(x_0, ..., x_n) | x_i \neq 0\}$. Проективное пространство покрывается множествами $U_i = [\tilde{U}_i]$. Пары (U_i, f_i), где $f_i([x_0, ..., x_n]) = (\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}) \in \mathbb{R}^n$ образуют гладкий атлас на $\mathbb{R}P^n$. Отображение ρ порождает отображение $\pi : E \to \mathbb{R}P^n$, переводящее подпространство $V(m) \in \mathbb{R}^{n+1}$, порожденное вектором $m \in M$, в $[m]$. Соответствие $\pi^{-1}[x_0, ..., x_n] \mapsto ([x_0, ..., x_n], x_i)$, порождает локальную тривиализацию $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}$. Функции перехода на $U_i \bigcap U_j$ равны $g_{ij} = \frac{x_i}{x_j}$.

3) Рассмотрим атлас локальных карт на гладком $\{(f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^r) | \alpha \in \Upsilon\}$ многообразии X. Пересечениям $U_\alpha \bigcap U_\beta$ отвечает отображения $f_\beta f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \to f_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta)$. Их якобианы $g_{\alpha,\beta} = J(f_\beta f_\alpha^{-1})$ удовлетворяют условиям леммы 8.1 и следовательно порождает векторное расслоение $\pi : TX \to X$, называемое касательными расслоением.

Морфизмом векторного расслоения $\pi : E \to X$ в векторное расслоение $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$ называется пара гладких отображений $\varphi_X : X \to \tilde{X}$ и $\varphi_E : E \to \tilde{E}$ таких, что $\tilde{\pi}\varphi_E = \varphi_X \pi$ и ограничение $\varphi_E|_{E_p} : E_p \to E_{\varphi_X(p)}$ является гомоморфизмом. Как обычно, обратимый в классе морфизмов морфизм расслоений называется *изоморфизмом расслоений.* При $X = \tilde{X}$ и тождественном отображении φ_X изоморфизм называется *эквивалентностью расслоений*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_E} & \tilde{E} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\tilde{\pi}} \\ X & \xrightarrow{\varphi_X} & \tilde{X} \end{array}$$

Упражнение 8.1. *Доказать, что семейства переходных функций $\{g_{\alpha,\beta}\}$ и $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}$, отвечающие покрытию $X = \bigcup U_\alpha$ задают эквивалентные расслоения, если и только если существует семейство гладких отображений $l_\alpha : U_\alpha \to GL(r, \mathbb{R})$ такое, что $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = l_\alpha g_{\alpha,\beta} l_\beta^{-1}$. Доказать, что касательное расслоение, зависящее в нашем определении от атласа локальных карт, переходит в эквивалентное при замене атласа.*

Упражнение 8.2. *Докажите, что для любого векторного расслоения $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$ и любого гладкого отображения $\varphi_X : X \to \tilde{X}$ существует векторное расслоение $\pi : E \to X$ и отображения $\varphi_E : E \to \tilde{E}$ такие, что (φ_X, φ_E) — морфизм расслоений. Докажите, что такое векторное расслоение (называемое обратным образом расслоения) единственно с точностью до эквивалентности.*

На векторные расслоения над X распространяются все операции между векторными пространствами. Прямая сумма $\pi_1 \oplus \pi_2 : E_1 \bigoplus E_2 \to X$ расслоений $\pi_1 : E_1 \to X$ и $\pi_2 : E_2 \to X$ определяется, например, условием $(\pi_1 \oplus \pi_2)^{-1}(p) = \pi_1^{-1}(p) \oplus \pi_2^{-1}(p)$. Расслоение $\pi^* : E^* \to X$ называется *сопряженным* к расслоению $\pi : E \to X$, если слои E_p и E_p^* сопряжены, то есть $E^* = Hom(E, \mathbb{R}_X)$, где $\mathbb{R}_X$ — тривиальное расслоение ранга 1. Расслоение, сопряженное к касательному расслоению, называется *кокасательным.*

Упражнение 8.3. *Дать точные определения и найти переходные функции расслоений $E_1 \bigoplus E_2 \to X$, $E_1 \otimes E_2 \to X$, $Hom(E_1, E_2) \to X$, $S^n E \to X$ (симметричная тензорная степень), $\Lambda^n E \to X$ (антисимметричная тензорная степень), $E^* \to X$ и для кокасательного расслоения.*

Сечением векторного расслоения $\pi : E \to X$ называется гладкое отображение $s : X \to E$ такое что πs — тождественное отображение. Множество сечений над $U \subset X$ будет обозначаться $E(U)$. Нетрудно видеть, что соответствие $U \mapsto E(U)$ и очевидные функции ограничения порождают пучок $\mathcal{E}_E$, называемый *пучком сечений векторного расслоения* $\pi : E \to X$. Пучки, получающиеся таким способом из векторных расслоений, и изоморфные им пучки называются *локально свободными.*

Пример 8.2. *Пучок сечений антисимметричной тензорной степени $\Lambda^p T^* X$ кокасательного расслоения $\pi : T^* X \to X$ изоморфен пучку $\mathcal{E}^p$ дифференциальных p-форм.*

Локально свободные пучки являются пучками модулей над мягким пучком гладких функций. Следовательно, согласно теореме 7.1 все они мягкие.

Упражнение 8.4. *По аналогии с определением морфизмов расслоений дать определение морфизмов пучков над не совпадающими топологическими пространствами. Определить обратный образ пучка и доказать его единственность. Как связаны морфизмы локально свободных пучков и морфизмы отвечающих им векторных расслоений?*

8.2. **Универсальные расслоения.** *Грассмановым многообразием $\mathbb{K}G_{r,n}$ над полем $\mathbb{K}$* называется множество всех r-мерных подпространств векторного пространства $\mathbb{K}^n$. Мы будем рассматривать лишь вещественные ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) и комплексные ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) грассмановы многообразия.

Универсальным расслоением называется расслоение $\pi_{r,n} : E \to \mathbb{R}G_{r,n}$ ранга r, слой которого E_p над точкой $p \in \mathbb{R}G_{r,n}$ совпадает с подпространством в $\mathbb{R}^n$, представляющим p.

Структура гладкого (соответственно, комплексного) многообразия определяется на $\mathbb{R}G_{r,n}$ и E следующим образом. Рассмотрим множество $M_{r,n}$ всех матриц $r \times n$ ранга r с элементами из $\mathbb{R}$. Строчки матрицы $m \in M_{r,n}$ будем интерпретировать как векторы пространства $\mathbb{R}^n$. Они образуют базис подпространства $[m] \in \mathbb{R}G_{r,n}$. Рассмотрим отображение ρ, переводящее подпространство, порожденное строками матрицы $m \in M_{r,n}$ в $[m]$. Положим $E_{[m]} = \rho^{-1}([m])$.

Группа $GL(r, \mathbb{R})$ действует на $M_{r,n}$ умножением слева, переводя строчки матрицы $M_{r,n}$ в их линейные комбинации и тем самым меняя базис пространства $[m]$. Это позволяет отождествить подпространство $[m] \in \mathbb{R}G_{r,n}$ с орбитой матрицы m под действием группы $GL(r, \mathbb{K})$.

Матрице $m \in M_{r,n}$ и набору чисел $\alpha = \{1 \leq \alpha_1 < \alpha_2, ..., < \alpha_r \leq n\}$ отвечает матрица $m_\alpha \in GL(r, \mathbb{R})$, составленная из столбцов α. Обозначим через E_α

множество всех матриц $m \in M_{r,n}$ таких, что матрица m_α невырождена. Множество их орбит $\{[m]\}$ образуют открытое множество $[E_\alpha] \subset \mathbb{R}G_{r,n}$. Совокупность всех таких множеств является покрытием многообразия $\mathbb{R}G_{r,n}$.

Сопоставим матрице $m \in E_\alpha$ матрицу $m_{\bar\alpha} \in M_{r,n-r}$, получающуюся из матрицы $m_\alpha^{-1}m$ выкидыванием столбцов α. Матрицу $m_{\bar\alpha}$ можно рассматривать как вектор $f_\alpha([m])$ пространства $\mathbb{R}^{r\times(n-r)}$. Пары $([E_\alpha], f_\alpha)$ образуют гладкий атлас многообразия $\mathbb{R}G_{r,n}$.

Для $m \in E_\alpha$ обозначим через $h_\alpha : E_{[m]} \to \mathbb{R}^r$ линейный оператор, переводящий строки матрицы m_α в стандартный базис пространства $\mathbb{R}^r$. Тогда соответствие $m \mapsto ([m], h_\alpha(m))$ порождает тривиализацию $\pi_{r,n}^{-1}(E_\alpha) \to E_\alpha \times \mathbb{R}^r$.

Упражнение 8.5. *Найти функции перехода между этими тривиализациями.*

Термин "универсальное расслоение"объясняется следующим фактом

Теорема 8.1. *Всякое векторное расслоение $\pi : E \to X$ ранга r над компактным гладким многообразием X изоморфно обратному образу универсального расслоения $\pi_{r,N} : M_{r,N} \to \mathbb{R}G_{r,N}$ для некоторого гладкого отображения $\Phi : X \to \mathbb{R}G_{r,N}$.*

Доказательство. Обозначим через $l_1, ..., l_r$ базис сопряженного пространства $(\mathbb{R}^r)^*$ такой, что $l_i(x_1, ..., x_r) = x_i$. Покроем X конечной системой тривиализаций $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ расслоения $\pi : E \to X$. Функционалы $l_1, ..., l_r$ порождают сечения $l_1^\alpha, ..., l_r^\alpha$ ограничения сопряженного расслоения $\pi^* : E^* \to X$ на U_α. Используя разбиение единицы, ассоциированное с покрытием $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ продолжим сечения $\{l_i^\alpha\}$ до глобальных сечений $\tilde l_1, ..., \tilde l_N$ расслоения $\pi^* : E^* \to X$. Ранг этого набора сечений в каждой точке $p \in X$ равен r.

Сопоставим теперь базису $e_1, ..., e_r$ в слое $E_p = \pi^{-1}(p)$ матрицу $W_p = \{\tilde l_j(e_i)\}$. Обозначим через $[W_p] \subset \mathbb{R}^N$ векторное пространство, порожденное строками этой матрицы. Замена базиса $e_1, ..., e_r$ эквивалентна умножению матрицы W_p слева на невырожденную матрицу. Поэтому подпространство $[W_p] \in \mathbb{R}G_{r,N}$ не зависит от выбора базиса. Таким образом, мы построили гладкое отображение $\Phi : X \to \mathbb{R}G_{r,N}$, где $\Phi(p) = [W_p]$. Отображение, сопоставляющее базису $e_1, ..., e_r$ строки матрицы W_p, порождает изоморфизм между расслоением $\pi : E \to X$ и ограничением универсального расслоения $\pi_{r,N} : M_{r,N} \to \mathbb{R}G_{r,N}$ на подмножество $\Phi(X)$. □

Замечание 8.1. *Можно доказать, что всякое векторное расслоение с не обязательно компактной базой может быть покрыто конечной системой тривиализаций.Таким образом, теорема 8.1 верна для произвольного гладкого, не обязательно компактного многообразия.*

9. Комплексные многообразия.

9.1. **Дифференциальные формы.** Комплексное векторное пространство V порождает вещественное векторное пространство $V_\mathbb{R}$, где $\dim_\mathbb{R} V_\mathbb{R} = 2\dim_\mathbb{C} V$. Умножение на i в пространстве V порождает линейный оператор $J : V_\mathbb{R} \to V_\mathbb{R}$. Сопоставим базису $(e_1, ..., e_n)$ пространства V базис $(e_1, f_1, ..., e_n, f_n)$ пространства $V_\mathbb{R}$, где $f_i = ie$. Тогда $J(e_k) = f_k$, $J(f_k) = -e_k$.

Рассмотрим теперь комплексное векторное пространство $V_\mathbb{C} = V_\mathbb{R} \bigotimes_\mathbb{R} \mathbb{C} = \{\alpha^k e_k + \beta^k f_k | \alpha^k, \beta^k \in \mathbb{C}\}$. Обозначим через $Q : V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-линейный оператор $Q(\alpha^k e_k + \beta^k f_k) = \bar\alpha^k e_k - \bar\beta^k f_k$.

Упражнение 9.1. *Доказать, что оператор Q не зависит от выбора базиса $(e_1, ..., e_n)$.*

Продолжим J до $\mathbb{C}$-линейного оператора $J_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$. Тогда $J_{\mathbb{C}}^2 = -1$ и комплексное пространство $V_{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму комплексных подпространств $V^{1,0} \bigoplus V^{0,1}$, где $V^{1,0} = \{v \in V_{\mathbb{C}} | J_{\mathbb{C}} v = iv\}$, $V^{0,1} = \{v \in V_{\mathbb{C}} | J_{\mathbb{C}} v = -iv\}$ и $Q(V^{1,0}) = V^{0,1}$. Кроме того, проекция $I : V_{\mathbb{C}} \to V$, где $I(e_k) = e_k$, $I(f_k) = 0$, порождает $\mathbb{C}$-изоморфизм $I : V^{1,0} \to V$.

Обозначим через $\bigwedge^{p,q} V \subset \bigwedge^{p+q} V_{\mathbb{C}}$ подпространство, порожденное внешними формами вида $u \wedge v$, где $u \in \bigwedge^p V^{1,0}$, $v \in \bigwedge^q V^{0,1}$. Тогда $\bigwedge^r V_{\mathbb{C}} = \sum_{p+q=r} \bigwedge^{p,q} V$.

Рассмотрим теперь комплексное многообразие X. Кокасательное пространство T_z^* в точке $z \in X$ является комплексным векторным пространством. Применяя к нему предыдущую конструкцию, находим разложение комплексного векторного пространства $\bigwedge^r (T_z^*)_{\mathbb{C}} = \sum_{p+q=r} \bigwedge^{p,q} (T_z^*)$. Сечения $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^r(U)$ порожденного им расслоения $\bigwedge^r T_{\mathbb{C}}^* \to X$ называются *комплекснозначными дифференциальными формами полной степени r*.

Рассмотрим естественные проекции $\pi_{p,q} : \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^r(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U)$ и операторы $\partial = \pi_{p+1,q} d : \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+q+1}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+1,q}(U)$, $\bar\partial = \pi_{p,q+1} d : \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+q+1}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(U)$.

Упражнение 9.2. *Доказать, что $Q \partial Q = \bar\partial$.*

Опишем теперь действие этих операторов в локальной карте $z : U \to \mathbb{C}^n$. Комплексные локальные координаты $z = (z^1, ..., z^n)$ порождают вещественные локальные координаты $z^k = x^k + iy^k$. Дифференциалы координатных функций образуют ковекторные поля $(dz^1, ..., dz^n)$, $(dx^1, ..., dx^n, dy^1, ..., dy^n)$. Обозначим через $(\frac{\partial}{\partial z^1}, ..., \frac{\partial}{\partial z^n})$, $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial}{\partial y^n})$ двойственные им векторные поля. Тогда $dz^k = dx^k + i dy^k$ и $\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{\partial}{\partial y^k}$. Положим $\overline{dz^k} = dx^k - i dy^k$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z^k}} = \frac{\partial}{\partial x^k} + i \frac{\partial}{\partial y^k}$.

Упражнение 9.3. *Векторы $\{\frac{\partial}{\partial z^k} | k = 1, ..., n\}$ и $\{\frac{\partial}{\partial \overline{z^k}} | k = 1, ..., n\}$ образуют базисы пространств $(T_z)^{1,0}$ и $(T_z)^{0,1}$ соответственно. Ковекторы $\{dz^k | k = 1, ..., n\}$ и $\{\overline{dz^k} | k = 1, ..., n\}$ образуют базисы пространств $(T_z^*)^{1,0}$ и $(T_z^*)^{0,1}$ соответственно.*

Лемма 9.1. $\partial = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}$, $\bar\partial = \overline{dz^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}$, $d = \partial + \bar\partial$, $\partial^2 = \bar\partial^2 = \partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0$.

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U)$, $\sum_1 = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}\xi$ и $\sum_2 = \overline{dz^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}\xi$. Тогда $d\xi = \sum_1 + \sum_2$, причем $\sum_1 \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+1,q}(U)$ и $\sum_2 = \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(U)$. Таким образом, $\partial\xi = \pi_{p+1,q} d\xi = \sum_1 = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}\xi$ и $\bar\partial\xi = \pi_{p,q+1} d\xi = \sum_2 = \overline{dz^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}\xi$. Следовательно, $\partial = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}$ и $\bar\partial = \overline{dz^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}$ и $d = \partial + \bar\partial$. Ввиду $d^2 = 0$ отсюда следует, что $0 = (\partial + \bar\partial)^2\xi = \partial^2\xi + \bar\partial^2\xi + (\partial\bar\partial + \bar\partial\partial)\xi$, причем $\partial^2\xi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+2,q}(U)$, $\bar\partial^2\xi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+2}(U)$, $(\partial\bar\partial + \bar\partial\partial)\xi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+1,q+1}(U)$. Таким образом, $\partial^2 = \bar\partial^2 = \partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0$. □

Следующая лемма аналогична лемме Пуанкаре и доказывается по той же схеме

Лемма 9.2. *(Дольбо). Пусть $\omega \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U)$ и $z \in U$. Тогда в некоторой окрестности V точки z: 1) условия $\partial\omega = 0$ и $\omega \in \partial\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p-1,q}(V)$ эквивалентны; 2) условия $\bar\partial\omega = 0$ и $\omega \in \bar\partial\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q-1}(V)$ эквивалентны.*

9.2. **Когомологии Дольбо.** *Голоморфное (локально тривиальное) расслоение* $\pi : E \to X$ комплексных многообразий ранга определяется как гладкое расслоение, где слои являются комплексными векторными пространствами и все функции перехода голоморфны.

Кокасательное расслоение T^*X к комплексному многообразию X имеет естественную структуру комплексного расслоения. Сечения внешней степени $\bigwedge^p T^*X$ образуют пучок Ω^p *голоморфных дифференциальных форм степени* p. Другими словами, $\Omega^p(U) = \{\omega \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,0}(U) | \bar\partial\omega = 0\} = \{\omega = \sum a_{i_1 \dots i_p} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} | \frac{\partial a_{i_1\dots i_p}}{\partial \bar z^j} = 0\}$.

Упражнение 9.4. *Доказать, что последовательность пучков* $0 \to \mathbb{C} \to \Omega^0 \xrightarrow{\partial} \Omega^1 \xrightarrow{\partial} \Omega^2 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \Omega^n \xrightarrow{\partial} 0$ *является точной.*

Теорема 9.1. *(Дольбо).* $H^q(X, \Omega^p) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(X))/\mathrm{Im}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(X))$

Доказательство. Последовательность пучков $0 \to \Omega^p \xrightarrow{in} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,n} \xrightarrow{\bar\partial} 0$ является резольвентой ввиду леммы Дольбо. Она ациклична ввиду мягкости пучков $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}$ (следствия 7.1 и 4.1). Поэтому утверждение теоремы Дольбо следует из теоремы 5.1. □

Для компактного многообразия размерности когомологий $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega^p)$ конечны и называются *числами Ходжа.*

Пусть теперь $\pi : E \to X$ — голоморфное расслоение ранга r над комплексным многообразием X и $\mathcal{E}_E$ — пучок его голоморфных сечений. Тогда голоморфные сечения Ω_E^p расслоения $(\bigwedge^p T^*X) \bigotimes_{\mathbb{C}} E$ называются *голоморфными дифференциальными формами степени* p *с коэффициентами в* E. Сечения пучка $\mathcal{E}_E^{p,q} = \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q} \bigotimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_E$ называются *дифференциальными (p,q)-формами с коэффициентами в* E. Рассмотрим оператор $\bar\partial_E : \mathcal{E}_E^{p,q} \to \mathcal{E}_E^{p,q+1}$ такой, что $\bar\partial_E(\omega \otimes e) = \bar\partial\omega \otimes e$.

Упражнение 9.5. *Доказать, что оператор* $\bar\partial_E$ *корректно определен для любого голоморфного расслоения* E*, в то время как оператор* $\partial_E(\omega \otimes e) = \partial\omega \otimes e$ *— лишь для одномерного тривиального расслоения.*

Повторяя рассуждения теоремы Дольбо, находим

Теорема 9.2. $H^q(X, \Omega_E^p) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}_E^{p,q}(X) \xrightarrow{\bar\partial_E} \mathcal{E}_E^{p,q+1}(X))/\mathrm{Im}(\mathcal{E}_E^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\bar\partial_E} \mathcal{E}_E^{p,q}(X))$.

10. Линейные расслоения и первый класс Черна.

Изучим более детально голоморфные расслоения $\eta : E \to X$ ранга 1 на комплексном многообразии X. (Расслоения ранга 1 называются также *линейными.*) Рассмотрим пучок $\mathcal{O}^*$ необращающихся в 0 голоморфных функций на X, рассматриваемый как группа по умножению.

Теорема 10.1. *Между классами эквивалентности голоморфных линейных расслоений над* X *и элементами группы* $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ *существует естественное взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Немного модифицируя лемму Пуанкаре, нетрудно доказать, что существует покрытие Лере $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ для пучка $\mathcal{O}^*$. Очевидным образом модифицируя лемму 8.1, находим, что семейство голоморфных функций $\{g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}\}$ является системой функций перехода для некоторого линейного расслоения $\eta : E \to X$, если и только если $g_{\alpha,\beta}g_{\beta,\gamma}g_{\gamma,\alpha} = 1$, то есть $\{g_{\alpha,\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Аналогично, согласно упражнению 8.1, семейства голоморфных функций $\{g_{\alpha,\beta}\}$ и $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}$ задают эквивалентные расслоения, если и только если существует семейство голоморфных функций $l_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ такое, что $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = l_\alpha g_{\alpha,\beta} l_\beta^{-1} = l_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}$, где $l_{\alpha,\beta} = l_\alpha l_\beta^{-1}$. С другой стороны, $\{l_\alpha\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ и $\{l_{\alpha\beta}\} = \delta(\{l_\alpha\}) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Согласно теореме Лере 10.1, это означает, что классы эквивалентности голоморфных линейных расслоений над X взаимно однозначно соответствуют множеству $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)/B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) = \check{H}^1(X, \mathcal{O}^*) = H^1(X, \mathcal{O}^*)$ □

Упражнение 10.1. *Из теоремы 10.1 следует, что голоморфные линейные расслоения над X образуют коммутативную группу. Опишите ее в терминах самих расслоений.*

Рассмотрим точную последовательность пучков $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$, где $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на X, $\mathbb{Z}$ — подпучок локально постоянных функций и $\exp(f)(z) = e^{2\pi i f(z)}$. Она порождает (теорема 4.4), точную последовательность гомологий $0 \to H^0(X, \mathbb{Z}) \to H^0(X, \mathcal{O}) \to H^0(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{b_0} H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{b_1} H^2(X, \mathbb{Z})$..., со связывающими гомоморфизмами b_i. (Эти гомоморфизмы называются также *операторами Бокштейна.*)

Для $g = \{g_{\alpha,\beta}\}$ положим $\tau(g)_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2\pi i}\ln(g_{\alpha,\beta})$, где $\ln g$ — произвольная ветвь логарифма. Тогда $\tau(g) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$

Лемма 10.1. *Пусть* $g = \{g_{\alpha,\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. *Тогда* $b_1(\{g_{\alpha,\beta}\}) = \delta(\tau(g)) = \{\frac{1}{2\pi i}(\ln g_{\beta,\gamma} - \ln g_{\alpha,\gamma} + \ln g_{\alpha,\beta})\}$.

Доказательство. Действительно, $\delta(\{\tau(g)_{\alpha,\beta}\}) = \{\frac{1}{2\pi i}(\ln g_{\beta,\gamma} - \ln g_{\alpha,\gamma} + \ln g_{\alpha,\beta})\}$. Используя описание связывающего гомоморфизма (теорема 4.4), находим, что $b_1(\{g_{\alpha,\beta}\}) \ni (\delta\tau(g))_{\alpha,\beta,\gamma} = \{\frac{1}{2\pi i}(\ln g_{\beta,\gamma} - \ln g_{\alpha,\gamma} + \ln g_{\alpha,\beta})\}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z}^0(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z}^1(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & (\delta\tau) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z}^3(X) \arrow[d, "i"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & \mathcal{O}^0(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & (\tau) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & (\delta\tau) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & \mathcal{O}^3(X) \arrow[d, "\exp"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^*(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathcal{O}^{*0}(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & (g) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathcal{O}^{*2}(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathcal{O}^{*2}(X) \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

□

Вложение пучков $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ индуцирует гомоморфизм когомологий $j : H^*(X,\mathbb{Z}) \to H^*(X,\mathbb{R})$, убивающий кручение (элементы конечного порядка).

Первым классом Черна (S.S.Chern) расслоения η называется гомологический класс $c_1(\eta) = -j(b_1(g(\eta))) \in H^2(X,\mathbb{R})$, где $g(\eta) \in H^1(X,\mathcal{O}^*)$ отвечающий расслоению η класс когомологий. В русскоязычной литературе его называют также классом Чженя, транскрибируя китайский вариант фамилии.

Опишем теперь класс $c_1(\eta)$ в дифференциально-геометрических терминах. Для этого рассмотрим эрмитову метрику на расслоении η. Она задается гладкими комплекснозначными функциями $\{h_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}\}$ в тривиализации с функциями перехода $\{g_{\alpha,\beta}\}$, причем $h_\beta = g_{\alpha,\beta}\bar{g}_{\alpha,\beta}h_\alpha$.

Теорема 10.2. *Дифференциал* $\frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\ln h_\alpha$ *представляет* $c_1(\eta)$.

Доказательство. Положим $\mu_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\partial \ln h_\alpha$. Тогда $(\delta\mu)_{\alpha,\beta} = \mu_\beta - \mu_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\partial \ln \frac{h_\beta}{h_\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\partial \ln(g_{\alpha,\beta}\bar{g}_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{2\pi i}(\partial \ln g_{\alpha,\beta} + \partial \ln \bar{g}_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{2\pi i} d \ln g_{\alpha,\beta} = d\tau(g)_{\alpha,\beta}$. Согласно алгоритму, приведенному в теореме 6.1, отсюда следует, что коциклу Чеха $\delta\tau(g) = b_1(g(\eta))$ отвечает дифференциальная форма $d\mu_\alpha = d\frac{1}{2\pi i}\partial \ln h_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\bar{\partial}\partial \ln h_\alpha = -\frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\ln h_\alpha$

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R}(X) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{E}^0(X) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{E}^1(X) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (d\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{E}^3(X) \arrow[d, "\delta"] \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{E}^0) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (d\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{E}^3) \arrow[d, "\delta"] \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (\tau) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (d\tau = \delta\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{E}^2) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{E}^3) \arrow[d, "\delta"] \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (\delta\tau) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{E}^1) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{E}^2) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{E}^3) \arrow[d, "\delta"] \\
 & {} & {} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}
$$

□

Упражнение 10.2. *Докажите, что первый класс Черна тривиального расслоения равен 0.*

Пример 10.1. *Найдем класс Черна касательного расслоения к сфере Римана* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\infty$. *Используем сферическую эрмитову метрику, имеющую вид* $h(z) = \frac{1}{(1+|z|^2)^2}$ *на комплексной плоскости* $\{z\} = \mathbb{C}$ *и такой же вид в координатной карте* $w = \frac{1}{z}$ *на* $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$. *Тогда* $c_1 = \frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\ln h_\alpha = \frac{i}{\pi(1+|z|^2)^2}dz \wedge d\bar{z}$. *В частности, интеграл* $\int\limits_{\overline{\mathbb{C}}} c_1 = 2$ *совпадает с эйлеровой характеристикой сферы Римана. Можно доказать, что интеграл первого класса Черна касательного расслоения к римановой поверхности всегда равен ее эйлеровой характеристике.*

Упражнение 10.3. *Докажите, что любое голоморфное векторное поле на сфере обращается в 0 в некоторой точке.*

Замечание 10.1. *Рассмотренная выше конструкция применима и для произвольных гладких $\mathbb{C}$-векторных расслоений. Для этого надо заменить пучки $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}^*$ на пучки гладких функций $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$. В этом случае, ввиду мягкости пучка $\mathcal{E}$, гомоморфизм Бокштейна устанавливает изоморфизм $H^1(X, \mathcal{E}^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$. Таким образом, линейное $\mathbb{C}$-векторное расслоение с точностью до изоморфизма определяется своим целочисленным (возможно с кручением) классом Черна.*

Другое описание голоморфных линейных расслоений дается с помощью дивизоров. Рассмотрим пучок $\mathcal{M}$ мероморфных функций на комплексном многообразии X. Пучок $\mathcal{D} = \mathcal{M}/\mathcal{O}^*$ называется *пучком дивизоров*, а его сечения D *дивизорами* на X.

Слой $\mathcal{M}_x$ состоит из классов эквивалентности мероморфных функций $\frac{f_1}{f_2}$. Причем, если в некоторой окрестности $f_1, f_2 \neq 0$, то — это класс эквивалентности голоморфной функции. Поэтому в достаточно маленькой окрестности точки x дивизор D равен 0 вне множества нулей некоторой голоморфной функции $f_1 f_2$.

Таким образом, дивизор выделяет некоторое (возможно особое) комплексное подмногообразие в $X(D) \subset X$ коразмерности 2, компоненты которого имеют целочисленные кратности (степени нулей/полюсов функций f_1/f_2).

Из точности последовательности пучков $0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M} \to \mathcal{D} \to 0$ следует, что для дивизора $D \in H^0(X, \mathcal{D})$ существует покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ и мероморфные функции $f_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$, нули и полюса, которых расположены на $X(D)$, имеют ту же кратность, что и D, причем $g_{\alpha,\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \bigcap U_\beta)$. В частности, $g_{\alpha,\beta} g_{\beta,\gamma} g_{\gamma,\alpha} = 1$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$. Таким образом, дивизор D порождает линейное расслоение с коциклом $\{g_{\alpha,\beta}\}$.

Это соответствие можно описать с помощью индуцированной точной последовательностью гомологий $H^0(X, \mathcal{M}) \to H^0(X, \mathcal{D}) \to H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Из нее видно, что дивизоры описывают эквивалентные расслоения, если и только, если они получаются друг из друга умножением на глобальную мероморфную функцию. Такие дивизоры называются *линейно эквивалентными*.

Обратное соответствие строится по мероморфному сечению s расслоения η. Ему отвечает дивизор $D(s)$, состоящий из взятых с кратностями компонент множества нулей и полюсов сечения.

Можно доказать, что первый класс Черна голоморфного линейного расслоения над компактным многообразием двойственнен соответствующему расслоению дивизору D в следующем смысле. Дивизор $D \subset X$ порождает гомологический класс $e \in H_{2n-2}(X, \mathbb{C})$. Согласно теореме де Рама, класс e порождает линейный функционал $l_e : H^{2n-2}(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Тогда $l_e(\omega) = \int_X c_1(\eta) \wedge \omega$.