Спектр элемента алгебры

В этом листке слово «алгебра» означает комплексную ассоциативную алгебру с единицей 1. *Спектром* элемента a алгебры A называется множество

$$\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \text{ необратим}\}.$$

5.1. Для каждой из следующих алгебр A дайте критерий обратимости ее элемента и найдите спектр каждого ее элемента: **1)** $A = \mathbb{C}[t]$; **2)** $A = \mathbb{C}[[t]]$; **3)** $A = \mathbb{C}(t)$; **4)** $A = \mathbb{C}^X$ (X — множество); **5)** $A = C(X)$ (X — топологическое пространство); **6)** $A = \ell^\infty(X)$ (X — множество).

Определение 5.1. Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $f\colon X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется ее *существенным значением*, если для любой окрестности $U \ni \lambda$ выполнено условие $\mu(f^{-1}(U)) > 0$.

5.2. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f\colon X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция.
1) Приведите пример, показывающий, что значение f не обязано быть ее существенным значением.
2) Приведите пример, показывающий, что существенное значение f не обязано быть ее значением.
3) Докажите, что если $X = [a, b]$ — отрезок с мерой Лебега, а f непрерывна, то множество ее значений совпадает с множеством ее существенных значений.

5.3. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Докажите, что существенно ограниченная функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ обратима как элемент алгебры $L^\infty(X, \mu)$ тогда и только тогда, когда 0 не является ее существенным значением. Выведите отсюда, что спектр f как элемента алгебры $L^\infty(X, \mu)$ совпадает с множеством ее существенных значений.

5.4. Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм алгебр.
1) Докажите, что $\sigma_B(\varphi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ для любого $a \in A$.
2) Докажите, что $\sigma_B(\varphi(a)) = \sigma_A(a)$ для всех $a \in A$ тогда и только тогда, когда φ переводит необратимые элементы в необратимые.

5.5. Пусть A — алгебра, $a \in A$ — ее элемент и $L_a\colon A \to A$, $b \mapsto ab$ — оператор умножения. Докажите, что $\sigma_A(a) = \sigma_{\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)}(L_a)$.

5.6. Пусть A — ненулевая алгебра, $a \in A$ — нильпотентный элемент. Докажите, что $\sigma(a) = \{0\}$.

5.7. Пусть A — алгебра, $a \in A$ — обратимый элемент. Докажите, что $\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\}$.

5.8. Пусть A — алгебра, $a, b \in A$.
1) Докажите, что элемент $1 - ab$ обратим тогда и только тогда, когда элемент $1 - ba$ обратим. (*Указание.* Можно сначала угадать формулу, выражающую $(1 - ba)^{-1}$ через $(1 - ab)^{-1}$, а потом проверить, что она верна. А чтобы ее угадать, можно предположить, что $A = \mathbb{C}$, $|a| < 1$ и $|b| < 1$, и забыть о коммутативности умножения в $\mathbb{C}$.)
2) Докажите, что $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.
3) Докажите, что если a или b обратим, то $\sigma(ab) = \sigma(ba)$.
4) Приведите пример, показывающий, что в общем случае $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$.

5.9. Пусть A — конечномерная алгебра.
1) Докажите, что всякий элемент A, обратимый слева (или справа), обратим.
2) Пусть $a_1, \ldots, a_n \in A$. Докажите, что элемент $a_1 \cdots a_n$ обратим тогда и только тогда, когда все элементы $a_1, \ldots, a_n$ обратимы.
3) Докажите, что $\sigma(ab) = \sigma(ba)$ для любых $a, b \in A$.

5.10*. Докажите, что утверждения предыдущей задачи сохраняют силу для нётеровых алгебр.