Листок 8. Теорема Фубини

Анализ, 2 курс, **21.01.2013**

Полукольцом называется система множеств, удовлетворяющая следующим свойствам:
1) $\emptyset \in S$;
2) $A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S$;
3) $A, B \in S \Rightarrow A \setminus B = \cup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in S$.

8⋄1 Докажите, что, если S_1 и S_2 – полукольца, то система множеств $S = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in S_1, A_2 \in S_2\}$ тоже полукольцо.

8⋄2 Пусть S_1 и S_2 – полукольца, $S = S_1 \times S_2$, а m_1 и m_2 – меры на S_1 и S_2, соответственно.
а) Докажите, что функция $m = m_1 \cdot m_2$ является мерой на S.
б) Пусть m_1 и m_2 – σ-аддитивны. Докажите, что m – σ-аддитивна на S.

Пусть (X, Σ_x, μ_x) и (Y, Σ_y, μ_y) – измеримые пространства с σ-конечными полными мерами, $Z = X \times Y$, $S = \Sigma_x \times \Sigma_y$. Определим на S функцию $m(A_1 \times A_2) = \mu_x(A_1)\mu_y(A_2)$, $A_1 \in \Sigma_x$, $A_2 \in \Sigma_y$. Через $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ обозначим лебегово продолжение меры m с полукольца S. Соответствующее измеримое пространство обозначим (X, Σ, μ).
Пусть $A \in \Sigma$, введем обозначения:

$$A_x = \{y : (x, y) \in A\}, \qquad A_y = \{x : (x, y) \in A\}.$$

8⋄3 Докажите, что для любого μ-измеримого множества A выполнено

$$\mu(A) = \int_X \mu_y(A_x) d\mu_x = \int_Y \mu_x(A_y) d\mu_y.$$

8⋄4 Пусть $Y = \mathbb{R}$, $\mu_y = \lambda$ – мера Лебега, $A = \{(x, y) : x \in M, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, где M – μ_x-измеримое множество, а $f(x)$ – интегрируемая неотрицательная функция. Докажите, что

$$\mu(A) = \int_M f(x) d\mu_x.$$

8⋄5 (Теорема Фубини) Пусть меры μ_x и μ_y определены на σ-алгебрах, σ-аддитивны и полны. Пусть, также,

$$\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$$

и функция $f(x, y)$ интегрируема по мере μ на $A \subset X \times Y$. Тогда

$$\int_A f(x, y) d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y) d\mu_y \right) d\mu_x = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y) d\mu_x \right) d\mu_y.$$

8⋄6 **а)** Приведите пример функции $f(x, y)$, неинтегрируемой на $X \times Y$, для которой существуют оба повторных интеграла

$$\int_X d\mu_x \int_Y f(x, y) d\mu_y, \qquad \int_Y d\mu_y \int_X f(x, y) d\mu_x.$$

б) Приведите такой пример, если повторные интегралы равны, но $f(x, y)$ неинтегрируема.

8⋄7 Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Лебегу на $\mathbb{R}$. Докажите, что *свертка*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x - t) d\lambda_t$$

существует и интегрируема на $\mathbb{R}$ по Лебегу для почти всех x.