Листок 7.

Алгебра. 1 курс, **21.01.2013**

Максимальный балл за этот листок выставляется при решении из него любых СЕМИ задач, с учетом действия знака **&** . Каждая из задач, отмеченных знаком **U**, сдается, и, соответственно, засчитывается, как ОДНА ЗАДАЧА при условии наличия у студента ПИСЬМЕННОГО решения всех ее пунктов; преподаватель может по своему усмотрению попросить объяснить один или несколько ее пунктов.

7⋄1 Линейный оператор в конечномерном пространстве над $\mathbb{C}$ имеет единственный (с точностью до пропорциональности) собственный вектор. Докажите, что в подходящем базисе матрица этого оператора — жорданова клетка.

7⋄2$^{\&U}$ Каким может быть минимальный многочлен и жорданово разложение такого нильпотентного линейного оператора f в $\mathbb{R}^8$, что
а) $\dim\operatorname{Ker} f = 2$, $\dim\operatorname{Ker} f^2 = 4$? **б)** $\dim\operatorname{Ker} f = 2$, $\dim\operatorname{Ker} f^3 = 5$? **в)** $\dim\operatorname{Ker} f = 5$?
Для каждого случая приведите пример такого оператора.

7⋄3 Рассмотрим конечную строго возрастающую последовательность натуральных чисел $0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы существовал нильпотентный оператор f на n-мерном линейном пространстве, такой что $d_m = \dim\operatorname{Ker} f^m$.

7⋄4 **а)** Пусть линейные операторы f и g в конечномерном пространстве над $\mathbb{C}$ перестановочны, т.е. $fg = gf$. Докажите, что у f и g имеется общий собственный вектор.
б^{XX}**)** Докажите, что если два линейные оператора f и g в конечномерном пространстве над $\mathbb{C}$ таковы, что $\operatorname{rank}(fg - gf) \le 1$, то у f и g имеется общий собственный вектор.

7⋄5 Докажите, что следующие три свойства линейного оператора f в конечномерном пространстве над $\mathbb{C}$ равносильны: 1) минимальный многочлен совпадает с характеристическим;
2) каждому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка;
3) любой оператор, перестановочный с f, является линейной комбинацией степеней f.

7⋄6 Пусть f нильпотентный оператор в конечномерном пространстве V с минимальным многочленом $\mu_f(t) = t^k$, $e_1, \ldots e_n$ — базис V. Докажите, что можно выбрать несколько базисных векторов $e_{i_1}, \ldots e_{i_s}$ так, что векторы $f^{k-1}(e_{i_1}), \ldots, f^{k-1}(e_{i_s})$ образуют базис в $\operatorname{Im} f^{k-1}$, а все векторы $f^m(e_{i_p})$ $m = 0, 1, \ldots, k$, $p = 1, \ldots, s$, образуют часть жорданова базиса для оператора f, отвечающего жордановым клеткам максимальной размерности.

7⋄7 Докажите, что ненулевые квазимногочлены $P_1(t)e^{\lambda_1 t}, \ldots, P_n(t)e^{\lambda_n t}$ линейно независимы, если все λ_i различны.

7⋄8 Найдите матрицу оператора дифференцирования в пространстве квазимногочленов степени не выше n с показателем λ.

7⋄9$^{\&}$ Вычислите e^{Jt}, где J — жорданова клетка с собственным значением λ.

7⋄10$^{\&}$ Докажите, что если матрицы A и B перестановочны, то $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$. Приведите пример двух матриц A и B таких, что $e^{At}e^{Bt} \ne e^{(A+B)t}$.

7⋄11$^{\&}$ Докажите, что $\det e^{At} = e^{\operatorname{tr} At}$.

7⋄12 **а**$^{\&}$**)** Пусть A — квадратная матрица, элементами которой являются формальные степенные ряды; обозначим столбцы матрицы A через $a_1, \ldots a_n$, так что $A = (a_1, \ldots a_n)$. Докажите, что $\frac{d}{dt}\det A = \det(\frac{d}{dt}a_1, a_2, \ldots, a_n) + \det(a_1, \frac{d}{dt}a_2, \ldots, a_n) + \det(a_1, a_2, \ldots, \frac{d}{dt}a_n)$, и аналогичное утверждение относительно строк матрицы A.
б^{X}**)** Докажите, что формальные степенные ряды $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t) \in \mathbb{K}[[t]]$ линейно зависимы (как элементы векторного пространства над $\mathbb{K}$) тогда и только тогда, когда равен нулю определитель Вронского:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

7⋄13^{X} Для каждого нильпотентного оператора $N : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ существует единственная фильтрация (т. е. последовательность вложенных подпространств) $0 \subset W_{-m} \subset W_{-m+1} \subset \ldots \subset W_m \subset C^n$, $m < n$, такая что $N(W_k) \subset W_{k-2}$, и $N : W_{k+1}/W_k \to W_{-k}/W_{-k-1}$ – изоморфизм при любом k.