Спектры операторов

Определение 6.1. Пусть V — банахово пространство и T — ограниченный линейный оператор в V. Положим

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1}) \neq 0\},$$
$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1})} = V,\ \operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1}) \neq V\};$$
$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1})} \neq V\}.$$

Множество $\sigma_p(T)$ называется *точечным спектром* T, множество $\sigma_r(T)$ — его *остаточным спектром.* Множество $\sigma_c(T)$ часто называют *непрерывным спектром* T; впрочем, иногда непрерывный спектр определяют по-другому.

6.1. Пусть $\lambda = (\lambda_n)$ — ограниченная числовая последовательность. Найдите $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ для диагонального оператора $T = M_\lambda$ (см. ДЗ-5.3), действующего в пространстве **1)** ℓ^p при $1 \leqslant p < \infty$ или c_0; **2)** ℓ^∞.

6.2. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, f — существенно ограниченная измеримая функция на X и M_f — оператор умножения на f, действующий в $L^p(X, \mu)$ (см. ДЗ-5.5). Найдите $\sigma_p(M_f)$, $\sigma_c(M_f)$ и $\sigma_r(M_f)$ в случаях **1)** $p < \infty$; **2)** $p = \infty$.

6.3. *Оператор двустороннего сдвига* $T_b \colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ действует по формуле $(T_b(x))_i = x_{i-1}$ (где $i \in \mathbb{Z}$). Найдите $\sigma_p(T_b)$, $\sigma_c(T_b)$ и $\sigma_r(T_b)$. (*Указание*: удобно воспользоваться рядами Фурье.)

6.4. Пусть $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность с мерой «длина дуги/2π». Для фиксированного $\zeta \in \mathbb{T}$ определим оператор сдвига $T_\zeta \colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ формулой $(T_\zeta f)(z) = f(\zeta^{-1}z)$. Найдите $\sigma_p(T_\zeta)$, $\sigma_c(T_\zeta)$ и $\sigma_r(T_\zeta)$.

6.5. Найдите спектр оператора $T \colon L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$, действующего по формуле

$$(Tf)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t - s) f(s)\, ds.$$

6.6. Что можно сказать про спектр проектора? (*Подсказка*: проектор — это то же самое, что идемпотентный элемент алгебры линейных операторов.)

6.7. Докажите, что спектр биективной изометрии в банаховом пространстве содержится в $\mathbb{T}$.

6.8. Докажите, что любой непустой компакт в $\mathbb{C}$ (соответственно, в $\mathbb{R}$, в $\mathbb{T}$) является спектром некоторого ограниченного оператора (соответственно, ограниченного самосопряженного оператора, унитарного оператора) в гильбертовом пространстве.

6.9. Пусть T — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве V. Докажите, что **1)** $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_p(T') \cup \sigma_r(T')$; **2)** $\sigma_c(T) \subseteq \sigma_c(T') \cup \sigma_r(T')$; **3)** $\sigma_r(T) \subseteq \sigma_p(T')$; **4)** $\sigma_p(T') \subseteq \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$; **5)** $\sigma_c(T') \subseteq \sigma_c(T)$; **6)** $\sigma_r(T') \subseteq \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Докажите, что если V рефлексивно, то **7)** $\sigma_c(T) = \sigma_c(T')$; **8)** $\sigma_r(T') \subseteq \sigma_p(T)$.

6.10. Пусть T — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве. Сформулируйте и докажите соотношения между частями спектра операторов T и T^*, аналогичные соотношениям из предыдущей задачи.

6.11. Пусть $V = \ell^p$ или c_0. Операторы *правого* и *левого сдвига* $T_r, T_\ell \colon V \to V$ действуют по правилу $T_r(x) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, $T_\ell(x) = (x_2, x_3, \ldots)$. Найдите σ_p, σ_c и σ_r для операторов T_r и T_ℓ в случаях **1)** $V = \ell^p$, $1 < p < \infty$; **2)** $V = c_0$; **3)** $V = \ell^1$; **4)** $V = \ell^\infty$.

Определение 6.2. Ограниченный линейный оператор T в банаховом пространстве V называется *квазинильпотентным*, если $\sigma(T) = \{0\}$, или, эквивалентно, если $\|T^n\|^{1/n} \to 0$ при $n \to \infty$.

6.12. Пусть $H = \ell^2$ и $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Оператор

$$T_\alpha \colon H \to H, \quad T_\alpha(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$$

называется *оператором взвешенного сдвига.* (*Реклама*: такие операторы изучаются давно, но особую популярность приобрели в 90-х гг. прошлого века ввиду их важности для теории представлений компактных квантовых групп.)

1) Вычислите $\|T_\alpha\|$.

2) Вычислите $r(T_\alpha)$. Для каких последовательностей $\alpha \in \ell^\infty$ оператор T_α квазинильпотентен? Приведите конкретный пример такой последовательности.

6.13. Пусть $I = [a, b]$, $H = L^2(I)$ и $K \in L^2(I \times I)$. *Оператор Вольтерра* $V_K \colon L^2(I) \to L^2(I)$ задается формулой

$$(V_K f)(x) = \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy$$

Обратите внимание, что это частный случай интегрального оператора Гильберта–Шмидта из задачи 1.14. (*Реклама*: операторы Вольтерра образуют один из наиболее классических и давно изучаемых классов линейных операторов; они играют важную роль в теории интегральных уравнений, описывающих различные физические процессы.)

1) Докажите, что если функция K ограничена, то V_K квазинильпотентен.

2*) Докажите, что V_K квазинильпотентен для любой $K \in L^2(I \times I)$.

Таким образом, *интегральное уравнение Вольтерра второго рода* $f = \lambda V_K f + g$ относительно неизвестной функции $f \in L^2(I)$ имеет единственное решение для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и любой $g \in L^2(I)$.

6.14. 1) Докажите, что не существует ограниченных линейных операторов S, T в банаховом пространстве, удовлетворяющих соотношению $[S, T] = ST - TS = 1$.

2) Выведите из п. 1, что алгебра дифференциальных операторов вида $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$, где $a_k \in \mathbb{C}[x]$ (она называется *алгеброй Вейля*) не имеет представлений ограниченными операторами в ненулевых банаховых пространствах.

6.15*. Пусть $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Алгебраическим *квантовым тором* называется алгебра A_q с двумя обратимыми образующими u, v и соотношением $uv = qvu$. (*Реклама*: квантовый тор — одна из простейших некоммутативных нётеровых алгебр, играющая важную роль в некоммутативной геометрии. Соотношения $uv = qvu$ тесно связаны с *каноническими коммутационными соотношениями* Г. Вейля в квантовой механике.)

1) Докажите, что если $|q| \neq 1$, то A_q не имеет представлений ограниченными операторами в ненулевых банаховых пространствах.

2) Пусть $|q| = 1$. Постройте унитарные операторы U, V в пространстве $L^2(\mathbb{T})$, удовлетворяющие соотношению $UV = qVU$ (они дают, таким образом, представление A_q в $L^2(\mathbb{T})$). *Подсказка*: см. задачи 6.2 и 6.4.

2) Пусть $|q| = 1$, U и V — биективные изометрические линейные операторы в банаховом пространстве, удовлетворяющие соотношению $UV = qVU$. Найдите их спектры при условии, что q не является корнем из единицы.