Листок 9. Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции

Анализ, 2 курс, **27.01.2013**

Для любого разбиения $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$ обозначим

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Вариацией функции f на отрезке $[a, b]$ называется величина $V(f) = \sup_T V_T(f)$ (точная верхняя грань берётся по всем разбиениям отрезка). Если она конечна, то мы скажем, что $f(x)$ – *функция ограниченной вариации* на $[a, b]$. Множество всех функций ограниченной вариации на этом отрезке будет обозначаться через $V([a, b])$.

9◇1 **а)** Пусть $f(x)$ – монотонная функция на $[a, b]$. Докажите, что $f(x) \in V([a, b])$, и найдите её вариацию.
б) Пусть $f(x) \in V([a, b])$. Докажите, что $f(x)$ ограничена на $[a, b]$.
в) Пусть $f(x) \in V([a, b])$ и $c \in (a, b)$. Докажите, что $f(x) \in V([a, c])$, $f(x) \in V([c, b])$ и $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

9◇2 **а)** Докажите, что $f(x) \in V([a, b])$ тогда и только тогда, когда её можно представить в виде $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – неубывающие функции на $[a, b]$. **б)** Докажите, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ можно выбрать строго возрастающими на $[a, b]$.

9◇3 Пусть $f(x) \in V([a, b])$. Докажите, что $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ всюду, кроме не более чем счётного множества точек, в которых она имеет разрывы первого рода.

9◇4 Пусть $f(x) \in V([a, b])$. Докажите, что $f'(x)$ существует п.в. на (a, b) и $f'(x) \in L((a, b))$.

9◇5 Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Докажите, что $f(x) \in V([a, b])$ тогда и только тогда, когда существует такая неубывающая функция $g(x)$ на $[a, b]$, что $|f(x) - f(y)| < g(y) - g(x)$ для любого отрезка $[x, y] \subseteq [a, b]$.

9◇6 Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, а $\varphi(x)$ – строго возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$, причём $\varphi(a) = a$ и $\varphi(b) = b$. Докажите, что $f(x) \in V([a, b])$ тогда и только тогда, когда $g(x) = f(\varphi(x)) \in V([a, b])$.

9◇7 **а)** Пусть f и g из $V([a, b])$. Докажите, что $f(x) \cdot g(x) \in V([a, b])$ и

$$V_a^b(fg) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \cdot V_a^b(f) + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \cdot V_a^b(g).$$

б) Пусть $f, g \in V([a, b])$ и $|f(x)| \geqslant C > 0$ при $x \in [a, b]$. Докажите, что $\frac{g(x)}{f(x)} \in V([a, b])$.
в) Найдите положительные функции $f(x), g(x) \in V([0, 1])$ для которых $\frac{f(x)}{g(x)} \notin V([0, 1])$.

9◇8 Докажите, что функция $h(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + V_a^b(f)$ является нормой на пространстве $V([a, b])$.

Абсолютно непрерывные функции

Через $\Omega([a,b])$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $S = \{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$, принадлежащих $[a,b]$. Для системы $S \in \Omega([a,b])$ положим

$$\Theta(S) = \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k|, \qquad \Delta(f;S) = \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)|.$$

Функция $f(x)$ – *абсолютно непрерывна* на $[a,b]$ ($f(x) \in AC([a,b])$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой системы $S \in \Omega([a,b])$ с $\Theta(S) < \delta$ выполнено неравенство $\Delta(f;S) < \varepsilon$.

9⋄9 Пусть $f(x), g(x) \in AC([a,b])$. Докажите, что **а)** $f(x)\cdot g(x) \in AC([a,b])$; **б)** если $g(x) \neq 0$ на $[a,b]$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \in AC([a,b])$.

9⋄10 Докажите, что функция, удовлетворяющая условию Липшица $f \in Lip(1,[a,b])$, абсолютно непрерывна.

9⋄11 **а)** Приведите пример дифференцируемой почти всюду функции $f(x)$, для которой интеграл $\int_a^b f'(x)dx$ существует, но $\int_a^b f'(x)dx \neq f(b)-f(a)$. **б)** То же, но $f(x)$ должна быть непрерывной, а интеграл от производной должен быть отличен от нуля.

Скажем, что функция $f(x)$ на $[a,b]$ обладает *N-свойством Лузина* на этом отрезке, если для любого измеримого относительно классической меры Лебега λ множества $E \subset [a,b]$ с $\lambda(E) = 0$ множество $f(E)$ измеримо и $\lambda(f(E)) = 0$.

9⋄12 Пусть $f(x) \in AC([a,b])$. Докажите, что $f(x)$ обладает N-свойством Лузина на $[a,b]$.

9⋄13 Пусть $f(x) \in C([a,b])$. Докажите, что $f(E)$ измеримо (относительно классической меры Лебега) для любого измеримого (в том же смысле) $E \subset [a,b]$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ обладает N-свойством Лузина на $[a,b]$.

9⋄14 (*Теорема Банаха-Зарецкого.*) Пусть $f(x) \in C([a,b]) \cap V([a,b])$ и $f(x)$ обладает N-свойством Лузина на $[a,b]$. Доказать, что $f(x) \in AC([a,b])$.

9⋄15 Пусть дана функция $F(x) \in AC([a,b])$. Докажите, что почти всюду на (a,b) существует производная $F'(x) = f(x) \in L([a,b])$ и что при всех $x \in [a,b]$

$$F(x) = \int_{[a,x]} f d\lambda + F(a).$$