

Дополнительные главы квантовой механики

Листок 2. Символы дифференциальных операторов.

Обязательные задачи: 1а, 1б, 3, 4.

1. Пусть $f(p, q)$ — полином от коммутирующих переменных p, q . Определим полиномы $\hat{f}_{qp}(\hat{p}, \hat{q})$, $\hat{f}_{pq}(\hat{p}, \hat{q})$ и $\hat{f}_w(\hat{p}, \hat{q})$ от некоммутирующих переменных $\hat{p}, \hat{q}$ следующим образом. Если $f(p, q) = p^k q^l$ — моном, то положим

$$\hat{f}_{qp}(\hat{p}, \hat{q}) := \hat{q}^l \hat{p}^k, \quad \hat{f}_{pq}(\hat{p}, \hat{q}) := \hat{p}^k \hat{q}^l,$$

$$\hat{f}_w(\hat{p}, \hat{q}) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \hat{c}_{\sigma(1)} \cdots \hat{c}_{\sigma(n)},$$

где $n = k + l$ и $\hat{c}_{\sigma(i)} = \hat{p}$, если $1 \leq i \leq k$, $\hat{c}_{\sigma(i)} = \hat{q}$, если $k + 1 \leq i \leq k + l$. На линейных комбинациях мономов доопределим по линейности. Будем говорить, что два полинома $\hat{f}_1(\hat{p}, \hat{q})$ и $\hat{f}_2(\hat{p}, \hat{q})$ задают один и тот же дифференциальный оператор $\hat{f}$, если один получается из другого применением коммутационного соотношения $[\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar$. Полином $f(p, q)$ называется (нормальным, антинормальным и вейлевским соответственно) символом оператора $\hat{f}$.

- а) Докажите, что каждое из построенных соответствий между символами и операторами взаимнооднозначно.
 - б) Найдите нормальный, антинормальный и символ Вейля оператора $\hat{H} = \hat{p}\hat{q}$.
2. Докажите, что нормальный и антинормальный символы оператора $\hat{f}$ связаны соотношениями

$$f_{qp}(p, q) = e^{-i\hbar \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}} f_{pq}(p, q),$$

$$f_{qp}(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} f_{pq}(p + p', q + q') e^{-\frac{i}{\hbar} p' q'} dp' dq'.$$

3. Пусть $\hat{f} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$. Докажите, что нормальные символы $f(p, q)$, $f_1(p, q)$, $f_2(p, q)$ операторов $\hat{f}$, $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ связаны соотношениями

$$f(p, q) = f_1(p, q) \exp(-i\hbar \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) f_2(p, q) := (\exp(-i\hbar \partial_{p'} \partial_{q'}) f_1(p', q) f_2(p, q'))|_{p'=p, q'=q},$$

$$f(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(p + p', q) f_2(p, q + q') e^{-\frac{i}{\hbar} p' q'} dp' dq'.$$

Как эти соотношения обобщаются на случай полиномов от $2m$ переменных $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m$, $[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -i\hbar \delta_{ij}$?

4. Пусть $\hat{f}(\hat{a}, \hat{b})$ — некоторый моном от некоммутирующих переменных $\hat{a}, \hat{b}$, $[\hat{a}, \hat{b}] = 1$. Нормальным упорядочением $\mathcal{N}(\hat{f})$ называется полином $f(\hat{a}, \hat{b})$, где $f(a, b)$ — нормальный символ оператора $\hat{f}$. Наивным упорядочением $: \hat{f} :$ называется моном от $\hat{a}$ и $\hat{b}$, полученный из $\hat{f}(\hat{a}, \hat{b})$ простым перебрасыванием всех $\hat{a}$ направо без учета коммутационных соотношений. Докажите теорему Вика:

$$\mathcal{N}(\hat{f}) = \sum_{c \in C(\hat{f})} : c(\hat{f}) : .$$

Здесь суммирование производится по множеству $C(\hat{f}) = C_0(\hat{f}) \sqcup C_1(\hat{f}) \sqcup \dots$ т.н. сжатий монома $\hat{f}(\hat{a}, \hat{b})$: если $c \in C_m(\hat{f})$, то $c(\hat{f})$ — результат вычеркивания из $\hat{f}(\hat{a}, \hat{b})$ m пар сомножителей $(\hat{a}, \hat{b})$, таких что $\hat{a}$ стоит в мономе до $\hat{b}$ (не обязательно непосредственно перед $\hat{b}$).

5. Найдите нормальный символ оператора $e^{t\hat{p}\hat{q}}$ (экспоненту здесь можно понимать как формальный степенной ряд). *Подсказка:* Перепишите дифференциальное уравнение $\frac{\partial}{\partial t} e^{t\hat{p}\hat{q}} = \hat{p}\hat{q} e^{t\hat{p}\hat{q}}$ на языке нормальных символов и решите его.