

Листок 8.

АЛГЕБРА. 1 КУРС, 21.01.2013

Максимальный балл за этот листок ставится при решении из него любых 14 задач, с учетом действия знака & .

- 8♦1& Перечислите все попарно неизоморфные абелевы группы порядка 24 и 36.
- 8♦2& Перечислите все циклические подгруппы в группе S_5 .
- 8♦3& Представьте цикл $(123 \dots n) \in S_n$ в виде произведения $n - 1$ транспозиций.
- 8♦4& Докажите, что подгруппа индекса два всегда нормальна.
- 8♦5 Докажите, что определение группы равносильно следующему: группа это множество с такой ассоциативной операцией, что любое уравнение вида $ax = b$ или $ya = b$ имеет однозначное решение.
- 8♦6 а) При каких значениях n группы $D_n \times \mathbb{Z}_2$ и D_{2n} изоморфны?
б) Докажите, что при $m > 2$ группы $D_n \times \mathbb{Z}_m$ и D_{mn} никогда не изоморфны.
- 8♦7& Перечислите все нормальные подгруппы в группе D_4 . Найдите фактор-группу по одной из них (по указанию преподавателя).
- 8♦8& Приведите пример двух неизоморфных групп G_1 и G_2 и их нормальных подгрупп $H_1 \subset G_1$ и $H_2 \subset G_2$, таких что $H_1 \cong H_2$ и $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.
- 8♦9& Для каждого непростого делителя d числа 24 укажите в S_4 нециклическую подгруппу порядка d . Какие из этих подгрупп нормальны? Для нормальных подгрупп найдите фактор-группы.
- 8♦10 Докажите, что в группе четных перестановок A_4 нет подгруппы порядка 6.
- 8♦11 а) Докажите, что если элементы a и b некоторой группы коммутируют (т.е. $ab = ba$), то $\text{ord}(ab)$ является делителем числа $\text{НОК}(\text{ord } a, \text{ord } b)$.
б^{xx}) Покажите, что если a и b не обязательно коммутируют, то $\forall k, l, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k, l, m > 1$, существует такая группа и такие элементы a и b в ней, что $\text{ord } a = k$, $\text{ord } b = l$, $\text{ord}(ab) = m$.
с^x) Приведите требуемый в предыдущем пункте пример хотя бы для $k = l = 2$.
- 8♦12 Любая подгруппа конечной группы G нормальна. Верно ли, что группа G абелева?
- 8♦13 Докажите, что любая группа порядка $2p$, где p — нечетное простое число, либо является циклической, либо группой диэдра.
- 8♦14 Даны две конечные группы G и H . Очевидно, что если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ группы G и H содержат **разное** число элементов порядка k , то эти группы не могут быть изоморфны.
а) Верно ли, что если $\forall k \in \mathbb{N}$ конечные группы G и H содержат **одинаковое** число элементов порядка k , то эти группы изоморфны?
б) Верно ли предыдущее утверждение, если известно, что конечные группы G и H абелевы?
- 8♦15 Какие из выписанных групп попарно изоморфны?
 S_4 , $A_4 \times \mathbb{Z}_2$, D_{12} , $D_6 \times \mathbb{Z}_2$, $D_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $D_3 \times \mathbb{Z}_4$, $Q_8 \times \mathbb{Z}_3$, $D_4 \times \mathbb{Z}_3$.
- 8♦16 Докажите, что группа автоморфизмов циклической группы порядка n изоморфна мультипликативной группе кольца $\mathbb{Z}_n$.
- 8♦17 Найдите группы автоморфизмов следующих групп: а) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; б) D_3 ; в) D_4 ; г) Q_8 .
- 8♦18 Приведите пример неабелевой непростой конечной группы, которую нельзя представить в виде прямого или полупрямого произведения.
- 8♦19 Представьте группу D_6 двумя разными способами в виде полупрямого произведения двух групп. ("Разными" означает, что хотя бы одна пара сомножителей не изоморфна друг другу.)
- 8♦20 Докажите, что центр группы порядка p^n (p простое) нетривиален.
- 8♦21 Придумайте некоммутативную группу а) порядка 21; б) порядка 27; в) порядка 12, не изоморфную A_4 и D_6 .