

## Статистическая физика. Листок 1.

**Задача 1.** Два из пяти фундаментальных уравнений, приведенных ниже, не согласуются с постулатами термодинамики.

а) Для каждого случая рассмотрите зависимость энтропии  $S$  от внутренней энергии  $U$  (при постоянных числе частиц  $N$  и объеме  $V$ ), выберите два физически не допустимых уравнения, и объясните какие принципы они нарушают.

б) Для трех физически допустимых уравнений найдите зависимость  $U$  от  $S$  и запишите уравнения состояния. Убедитесь, что температура  $T$ , давление  $P$  и химический потенциал  $\mu$  — интенсивные переменные.

Ниже  $\alpha$  и  $R$  — положительные (размерные) постоянные.

$$a) \quad S = \alpha (NVU)^{1/3}$$

$$b) \quad S = \alpha \left( \frac{NU}{V} \right)^{1/3}$$

$$c) \quad S = \alpha \frac{V^3}{NU}$$

$$d) \quad S = NR \log(\alpha UV/N^2)$$

$$e) \quad U = \alpha \frac{S^2}{V} \exp\left(\frac{S}{NR}\right)$$

**Задача 2.** Каждая из систем  $A$  и  $B$ , разделенных жесткой, непроницаемой, адиабатической стенкой, описывается уравнением (а) из задачи 1. Система  $A$  имеет объем  $9 \times 10^{-6} \text{ м}^3$  и количество вещества 3 моля, а система  $B$  — объем  $4 \times 10^{-6} \text{ м}^3$  и количество вещества 2 моля. Полная энергия системы — 80 Дж. Постройте энтропию как функцию отношения  $U_A/(U_A + U_B)$ . Чему будут равны внутренние энергии подсистем, после того как стенка между ними станет диатермальной, и система придет к тепловому равновесию.

**Задача 3.** Фундаментальное уравнение газа Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$s = s_0 + \mathcal{R} \ln[(v - b)/(v_0 - b)] + (3/2)\mathcal{R} \ln \text{sh}[c(u + a/v)],$$

где  $v = V/N$ ,  $u = U/N$ ,  $s = S/N$ . Покажите, что одно из уравнений состояния имеет вид

$$(P + a/v^2)(v - b) = \mathcal{R}T.$$

Запишите его в виде вириального разложения и найдите первые вириальные коэффициенты. Выпишите остальные уравнения состояния.

**Задача 4.** Многие соотношения между термодинамическими величинами следуют из правил дифференцирования функций многих переменных. В частности, если переменные  $x, y, z$  связаны соотношением  $f(x, y, z) = 0$ , то выполняются равенства:

$$(\partial x / \partial y)_z = \frac{1}{(\partial y / \partial x)_z}, \quad (\partial x / \partial y)_z (\partial y / \partial z)_x (\partial z / \partial x)_y = -1.$$

Здесь символ  $(\partial x / \partial y)_z$  означает вычисление частной производной от  $x$  по переменной  $y$  при фиксированном  $z$ .

Еще одна серия соотношений, называемая соотношениями Максвелла, есть следствие перестановочности смешанных производных

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right).$$

Другими словами если  $dw = Mdx + Ndy$ , то  $(\partial M/\partial y)_x = (\partial N/\partial x)_y$ . Наконец, в более общем случае имеются соотношения для якобианов:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{D(u, v)}{D(s, t)} \cdot \frac{D(s, t)}{D(x, y)}$$

$$\frac{D(x, z)}{D(y, z)} = (\partial x/\partial y)_z = \frac{D(z, x)}{D(z, y)}.$$

В этих формулах принято следующее обозначение

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \partial u(x, y)/\partial x & \partial u(x, y)/\partial y \\ \partial v(x, y)/\partial x & \partial v(x, y)/\partial y \end{pmatrix}$$

а) Используя соотношения, приведенные выше, докажите равенства

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}, \quad C_P - C_V = VT \frac{\alpha^2}{\kappa_T},$$

где  $C_P, C_V, \kappa_T, \kappa_S$  — изобарная, изохорная теплоемкости и изотермическая, адиабатическая сжимаемости, соответственно:

$$C_R = \left( \frac{\delta Q}{\delta T} \right)_R, \quad \kappa_R = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_R,$$

а  $\alpha = V^{-1}(\partial V/\partial T)_P$  — коэффициент объемного расширения.

б) Вычислите  $C_P$  и  $C_V$  для газа Ван-дер-Ваальса.

**Задача 5.** Космологи рассматривают Вселенную как расширяющуюся полость с электромагнитным излучением, температура которого в настоящее время равна 2,7 градуса Кельвина .

а) Какова будет температура излучения когда объем Вселенной увеличится вдвое, по сравнению с его текущим значением, если предположить что при расширении энтропия остается постоянной (это неочевидное следствие расчетов с принятыми космологическими моделями)?

б) Чему равно давление излучения в настоящее время? Выразите ответ в паскалях и атмосферах.

**Задача 6.** Фундаментальное уравнение термодинамики для сильно анизотропного парамагнетика имеет вид:

$$U = NRT_0 \exp \left[ \frac{S}{NR} + \frac{M^2}{N^2 M_0^2} \right],$$

где  $T_0$  и  $M_0$  — положительные константы, а  $M$  — проекция магнитного момента  $\vec{M}$  на направление магнитного поля  $\vec{B}$ . Напомним, что энергия магнетика в магнитном поле  $\vec{B}$  дается соотношением

$$U = -\vec{B} \cdot \vec{M}$$

Запишите уравнение состояния для  $T(S, M, N)$ ,  $B(S, M, N)$ ,  $\mu(S, M, N)$  ( $\mu$  — химический потенциал,  $B$  — модуль напряженности магнитного поля). Вычислите свободную энергию Гельмгольца и свободную энергию Гиббса, как функции переменных  $(T, M, N)$  и  $(T, B, N)$  соответственно.